الفرع العلمي

المتجهات

الضرب القياسي وحل اسئلة الوحدة

اتحقق من فهمي
اتدرب واحل المسائل
مهارات التفكير العليا
كتاب التمارين
مدرسة سمر الثانوية للبنين
رافت صافي 0785824464

الضرب القياسي

أولاً :- الضرب القياسي للمتجهات

اذا كان $\vec{W}=\langle W_1, W_2, W_3\rangle$ و $\vec{V}=\langle V_1, V_2, V_3\rangle$ فان

$$\vec{V}\cdot\vec{W} = V_1W_1 + V_2W_2 + V_3W_3$$

حيث $\vec{V}\cdot\vec{W}$ تمثل الضرب القياسي للمتجهين وتقرأ $\vec{V}$ dot $\vec{W}$

تنبيه :- ناتج الضرب القياسي يساوي عدد ثابت وليس متجه

لأي 3 متجهات $\vec{V}, \vec{W}, \vec{U}$ واي عدد حقيقي C :-

1) $\vec{V}\cdot\vec{W} = \vec{W}\cdot\vec{V}$

2) $\vec{U}\cdot(\vec{V}+\vec{W}) = \vec{U}\cdot\vec{V} + \vec{U}\cdot\vec{W}$

3) $C(\vec{U}\cdot\vec{V}) = (C\vec{U})\cdot\vec{V}$

مثال :- جد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي :-

1) $\vec{a}=\langle 4, -6, 5\rangle$ و $\vec{b}=\langle 3, 7, 2\rangle$

2) $\vec{V}=5\hat{i}+4\hat{j}+8\hat{k}$, $\vec{W}=4\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$

الحل :-

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = (4)(3)+(-6)(7)+(5)(2)$

$= 12 - 42 + 10 = -20$

2) $\vec{V}\cdot\vec{W} = (5)(4)+(4)(3)+(8)(-4)$

$= 20 + 12 - 32$

$= 0$

التحقق من فهمك ص ١٤٤

جد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي :-

a) $\vec{v} = \langle 4, 8, -3 \rangle$, $\vec{w} = \langle -3, 7, 2 \rangle$

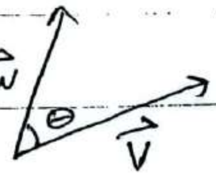
b) $\vec{m} = -3\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{n} = -12\hat{i} + 6\hat{j} - 8\hat{k}$

الحل :-

a) $\vec{v} \cdot \vec{w} = (4)(-3) + (8)(7) + (-3)(2) = -12 + 56 - 6 = 38$

b) $\vec{m} \cdot \vec{n} = (-3)(-12) + (5)(6) + (-1)(-8) = 36 + 30 + 8 = 74$

ثانياً: الزاوية بين متجهين في الفضاء



اذا كان $\vec{v}$ و $\vec{w}$ متجهين غير صفريين فانه يمكن قياس الزاوية بينهما θ باستعمال الصيغة الآتية

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}\right)$$

ملاحظة

1) اذا كان $\vec{v} \cdot \vec{w} < 0$ فهنا الزاوية منفرجة
" " $\vec{v} \cdot \vec{w} > 0$ حادة
" " $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ قائمة وعليه المتجهان متعامدان

خطوات ايجاد الزاوية :-
* جد اولاً $|\vec{v}|$, $|\vec{w}|$
* جد $\vec{v} \cdot \vec{w}$ ، $|\vec{v}||\vec{w}|$
من القانون // اذا احتجنا الى حاسبة نستخدم نظام (degree)

اذا طلب جيب تمام الزاوية

$$\cos\theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}$$

راقت ضاحي ٠٧٨٠٥٥٠٤١

مثال :- اذا كان $\vec{V} = \langle 5, -2, 1 \rangle$ وكان $\vec{W} = \langle -3, 1, 4 \rangle$ جد قياس الزاوية θ بين المتجه $\vec{V}$ والمتجه $\vec{W}$ الى اقرب عشر درجة

الحل :

$$|\vec{V}| = \sqrt{25+4+1} = \sqrt{30} \quad , \quad |\vec{W}| = \sqrt{9+1+16} = \sqrt{26}$$

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = (-3)(5) + (1)(-2) + (4)(1) = -15 - 2 + 4 = -13$$ (منفرجة)

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{V} \cdot \vec{W}}{|\vec{V}||\vec{W}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-13}{\sqrt{30}\sqrt{26}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-13}{\sqrt{780}}\right)$$

$$\theta \simeq 117.7^\circ$$ باستعمال الآلة الحاسبة

تحقق من فهمك ص 146 جد قياس الزاوية θ بين المتجه $\vec{u}$ والمتجه $\vec{w}$

a) $\vec{u} = -3\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}$
$\vec{w} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$

الحل :

$$|\vec{u}| = \sqrt{9+25+16} = \sqrt{50}$$
$$|\vec{w}| = \sqrt{16+4+9} = \sqrt{29}$$
$$\vec{u} \cdot \vec{w} = (-3)(4) + (5)(2) + (-4)(-3)$$
$$= -12 + 10 + 12$$
$$= 10$$ حادة

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}||\vec{w}|}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{50}\sqrt{29}}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{1450}}\right)$$
$$\simeq 74.8^\circ$$

b) $\vec{u} = \langle 2, -10, 6 \rangle$
$\vec{w} = \langle -3, 15, -9 \rangle$

الحل :

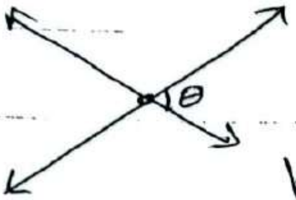
$$|\vec{u}| = \sqrt{4+100+36} = \sqrt{140}$$
$$|\vec{w}| = \sqrt{9+225+81} = \sqrt{315}$$
$$\vec{u} \cdot \vec{w} = (2)(-3) + (-10)(15) + (6)(-9)$$
$$= -6 - 150 - 54$$
$$= -210$$ منفرجة

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}||\vec{w}|}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{-210}{\sqrt{140}\sqrt{315}}\right)$$
$$= \cos^{-1}(-1)$$
$$= 180^\circ$$

رافت صباح

ثالثاً: الزاوية بين مستقيمين في الفضاء

نستطيع ايجاد الزاوية بين مستقيمين وذلك بايجاد الزاوية بين اتجاهيهما.



1) نحدد اتجاه كل مستقيم

2) نجد $\vec{v}\cdot\vec{w}$ ومقدار كل متجه $|\vec{w}|$ و $|\vec{v}|$

3) نطبق القانون $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}\right)$

4) اذا طلب الزاوية الحادة هنا نطرح (مقدار الزاوية المنفرجة) -18

مثال: اذا كانت $\vec{r} = \begin{pmatrix}6\\-3\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}8\\2\\-3\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم L_1

وكانت $\vec{r} = \begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-4\\9\\-1\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم L_2

جد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم L_1 والمستقيم L_2 الى أقرب عشر درجة

الحل:

اتجاه المستقيم L_1 هو: $\vec{v} = \begin{pmatrix}8\\2\\-3\end{pmatrix}$ واتجاه المستقيم L_2 هو $\vec{w} = \begin{pmatrix}-4\\9\\-1\end{pmatrix}$

منفرجة $\vec{v}\cdot\vec{w} = (8)(-4) + (2)(9) + (-3)(-1) = -32 + 18 + 3 = -11$

$|\vec{v}| = \sqrt{64+4+9} = \sqrt{77}$ ، $|\vec{w}| = \sqrt{16+81+1} = \sqrt{98}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{w}\cdot\vec{v}}{|\vec{w}||\vec{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-11}{\sqrt{77}\sqrt{98}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-11}{\sqrt{7546}}\right)$

$\theta \simeq 97.3$

قياس الزاوية المنفرجة بين المستقيم L_1 والمستقيم L_2 هو $97.3°$

ومقياس الزاوية الحادة بينهما هو $180 - 97.3 = 82.7°$

راقت صابح

التحقق من فهمك ص 147

اذا كانت $\vec{r} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\-5\\-1\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم L_1 وكانت $\vec{r} = \begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم L_2 جد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم L_1 والمستقيم L_2 الى اقرب درجة.

الحل :

اتجاه المستقيم L_1 هو $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\-5\\-1\end{pmatrix}$ واتجاه المستقيم L_2 هو $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$

علاه

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (1)(2) + (0)(-5) + (-3)(-1) = 2 + 0 + 3 = 5$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1+0+9} = \sqrt{10} \text{ و } |\vec{v}| = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30}$$

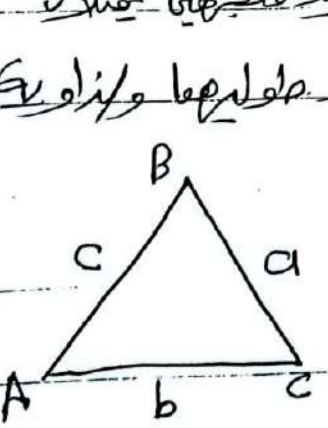
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{30}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{300}}\right)$$

$$\theta \simeq 73^\circ$$

وعليه قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين L_1 و L_2 هو 73°

رابعاً :- ايجاد مساحة المثلث

اذا علمت احداثيات رؤوس مثلث في الفضاء ، نستطيع استعمال الضرب القياسي للمتجهات في ايجاد مساحته وذلك بتحديد متجهين يمثلان ضلعين في المثلث لهما نقطة البداية نفسها ونجد طوليهما والزاوية بينهما ونطبق القانون :-



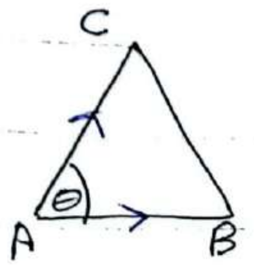
$$Area = \frac{1}{2}\, bc \sin A$$

$$Area = \frac{1}{2}\, ac \sin B$$

$$Area = \frac{1}{2}\, ab \sin C$$

مثال : جد مساحة المثلث ABC الذي احداثيات رؤوسه هي :

$A(5,6,-2)$ ، $B(2,-2,1)$ ، $C(2,-3,8)$



الحل :

(نحدد متجهات) $\vec{AC} = \langle 2-5, -3-6, 6+2 \rangle = \langle -3, -9, 8 \rangle$

$\vec{AB} = \langle 2-5, -2-6, 1+2 \rangle = \langle -3, -8, 3 \rangle$

(نجد مقدار كل منهما) $|\vec{AC}| = \sqrt{9+81+64} = \sqrt{154}$

$|\vec{AB}| = \sqrt{9+64+9} = \sqrt{82}$

(نجد الزاوية) $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = (-3)(-3) + (-9)(-8) + (8)(3) = 105$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{AC}\cdot\vec{AB}}{|\vec{AC}||\vec{AB}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{105}{\sqrt{82}\sqrt{154}}\right)$$

$\theta \simeq 20.9^\circ$

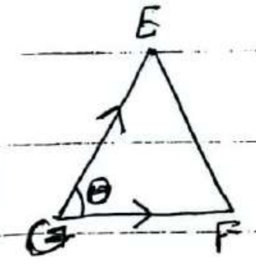
$$\text{Area} = \frac{1}{2}|\vec{AB}||\vec{AC}|\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{82}\sqrt{154}\sin 20.9$$

$$\simeq 20$$

التحقق من فهمك ص 149

جد مساحة المثلث EFG الذي احداثيات رؤوسه هي

$E(2,1,-1)$ ، $F(5,1,7)$ ، $G(6,-3,1)$



الحل :

$\vec{GF} = \langle 5-6, 1+3, 7-1 \rangle = \langle -1, 4, 6 \rangle$

$\vec{GE} = \langle 2-6, 1+3, -1-1 \rangle = \langle -4, 4, -2 \rangle$

$|\vec{GF}| = \sqrt{1+16+36} = \sqrt{53}$, $|\vec{GE}| = \sqrt{16+16+4} = 6$

$\vec{GF} \cdot \vec{GE} = (-1)(-4) + (4)(4) + (6)(-2) = 4+16-12 = 8$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{GF}\cdot\vec{GE}}{|\vec{GF}||\vec{GE}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{8}{6\sqrt{53}}\right)$$

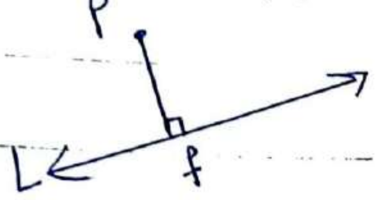
$\theta \simeq 79.4^\circ$

$$A = \frac{1}{2}|\vec{GF}||\vec{GE}|\sin\theta$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)(6)(\sqrt{53})\sin 79.4 \simeq 21.5^\circ$$

رافت صباح

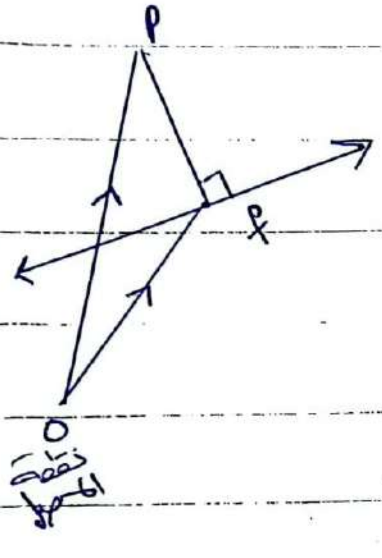
خامساً :- مسقط العمود على مستقيم من نقطة خارجه



في الشكل المجاور المستقيم L والنقطة P تقع خارجه
وعند انزال عمود من النقطة P على المستقيم L
في النقطة f فان النقطة f تسمى مسقط
العمود واذا كانت O نقطة الاصل فان

$$\vec{Pf} = \vec{Of} - \vec{OP}$$

حيث $\vec{Of}$ ، $\vec{OP}$ متجها موقع



خطوات ايجاد احداثيات النقطة f

1) نكتب القاعدة $\vec{Pf} = \vec{Of} - \vec{OP}$

2) P تعطى بالسؤال ومنها نجد $\vec{OP}$
أما $\vec{Of}$ يتم ايجادها من خلال ان النقطة f
تقع على المستقيم L وبالتالي تحقق معادلته
ومنه نجد $\vec{Pf}$

متجه المستقيم

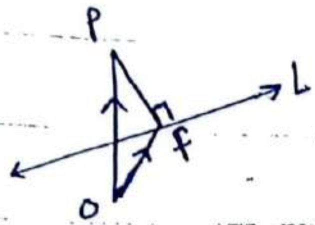
3) نجد t حيث نطبق القاعدة $\vec{Pf} \perp L$ (متعامدان) فان $\vec{Pf} \cdot l = 0$

4) قيمة t الناتجة من الفرع (3) يتم تعويضها في $\vec{Of}$
وبالتالي نجد احداثيات f

مثال ٤: اذا كانت $\vec{r} = \langle 28, -10, -4\rangle + t\langle 8, 3, -6\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم L والنقطة $P(3,-4,2)$ غير واقعة على المستقيم L اجب عن السؤالين

1) جد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم L

2) جد البعد بين النقطة P والمستقيم L



الحل: نجهز كل من $\vec{OP}$ و $\vec{Of}$

1) $\vec{OP} = \langle 3, -4, 2\rangle$

النقطة f تقع على المستقيم L فهي تحقق معادلته

$$\vec{Of} = \langle 28+8t, -10+3t, -4-6t\rangle$$

$$\vec{Pf} = \vec{Of} - \vec{OP} = \langle 28+8t, -10+3t, -4-6t\rangle - \langle 3, -4, 2\rangle$$

$$= \langle 25+8t, -6+3t, -6-6t\rangle$$

بما أن $\vec{Pf} \perp L$ فإن $\vec{Pf}$ عمودي على اتجاه L . $\vec{PF} \perp \langle 8, 3, -6\rangle$

الضرب نقطياً صفراً

$$(25+8t)(8) + (-6+3t)(3) + (-6-6t)(-6) = 0$$

$$200 + 64t - 18 + 9t + 36 + 36t = 0$$

$$109t = -218 \longrightarrow t = -2$$

نعوض t في $\vec{Of}$:

$$\vec{Of} = \langle 28-16, -10-6, -4+12\rangle = \langle 12, -16, 8\rangle$$

وعليه مسقط العمود من النقطة P على المستقيم L هو $(12, -16, 8)$

2) البعد بين النقطة P والمستقيم L هو طول القطعة المستقيمة من النقطة P الى النقطة f :

* نجد المتجه $\vec{PF}$:

$$\vec{PF} = \langle 25-16, -6-6, -6+12\rangle$$

$$= \langle 9, -12, 6\rangle$$

$$|\vec{PF}| = \sqrt{81+144+36} = \sqrt{261}$$

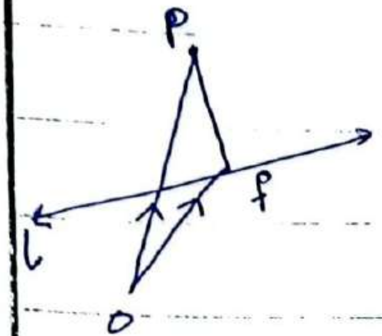
التحقق من فهمك ص١٤١

اذا كانت $\vec{r} = 16\hat{i} + 11\hat{j} - 3\hat{k} + t\langle 5\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k}\rangle$

معادلة متجهة للمستقيم l والنقطة $P(2, 0, \frac{10}{3})$ غير واقعة على المستقيم l

a) حدد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l

b) جد البعد بين النقطة P والمستقيم l.



الحل: نجد $\vec{Pf} = \vec{Of} - \vec{OP}$

$$\vec{OP} = 2\hat{i} + \frac{10}{3}\hat{k}$$

$$\vec{Of} = (16 + 5t)\hat{i} + (11 + 7t)\hat{j} + (-3 - 3t)\hat{k}$$

$$\vec{Pf} = (14 + 5t)\hat{i} + (11 + 7t)\hat{j} + \left(-\frac{19}{3} - 3t\right)\hat{k}$$

بما أن $\vec{Pf} \perp l$ فان $\vec{Pf} \cdot \vec{V} = 0$ حيث $\vec{V} = 5\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k}$

$$(5)(14 + 5t) + (7)(11 + 7t) + \left(\frac{-19}{3} - 3t\right)(-3) = 0$$

$$70 + 25t + 77 + 49t + 19 + 9t = 0$$

$$166 + 83t = 0 \rightarrow t = -2$$

$$\vec{Of} = (16 - 10)\hat{i} + (11 - 14)\hat{j} + (-3 + 6)\hat{k} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$$

وعليه مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l هو النقطة $(6, -3, 3)$

b) نجد مقدار المتجه $\vec{Pf}$

$$\vec{Pf} = (14 - 10)\hat{i} + (11 - 14)\hat{j} + \left(\frac{-19}{3} + 6\right)\hat{j}$$

$$\vec{Pf} = 4\hat{i} - 3\hat{j} - \frac{1}{3}\hat{j}$$

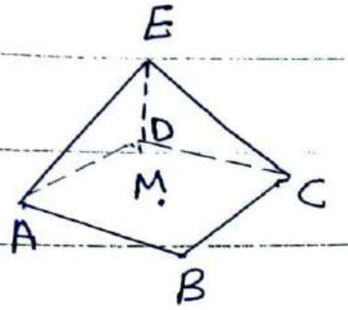
$$|\vec{Pf}| = \sqrt{16 + 9 + \frac{1}{9}} = \sqrt{25 + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{226}{9}} = \frac{\sqrt{226}}{3}$$

سادساً :- استعمال المتجهات لتحديد قياسات في اشكال ثلاثية الابعاد .

مثال : يظهر في الشكل المجاور الهرم ABCDE الذي قاعدته المربع ABCD واحداثيات رؤوسها :-

$A(1,1,-1)$ و $B(9,-1,-3)$ و $C(9,-7,3)$ و $D(1,-5,5)$ و $E(8,3,7)$

ومركزه النقطة M :



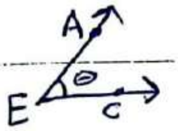
1) جد $m\angle AEC$ الى أقرب عشر درجة

2) بيّن أن $m\angle AME = 90°$

3) جد قياس $\angle EDB$

4) جد حجم الهرم .

الحل :-



1) نجد متجهين لهما نقطة بداية نفسها

ملاحظة

الحرف m واختصار قياس

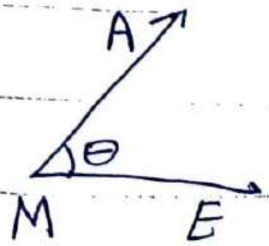
$$\vec{EA} = \langle 1-8, 1-3, -1-7 \rangle = \langle -7, -2, -8 \rangle$$
$$\vec{EC} = \langle 9-8, -7-3, 3-7 \rangle = \langle 1, -10, -4 \rangle$$
$$\vec{EA} \cdot \vec{EC} = (-7)(1) + (-2)(-10) + (-8)(-4)$$
$$= -7 + 20 + 32 = 45$$
$$|\vec{EA}| = \sqrt{49+4+64} = \sqrt{117}$$
$$|\vec{EC}| = \sqrt{1+100+16} = \sqrt{117}$$

$$m\angle AEC = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{EA}\cdot\vec{EC}}{|\vec{EA}||\vec{EC}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{45}{\sqrt{117}\sqrt{117}}\right)$$
$$\simeq 67.4°$$

راقت صابحي

2) M هي مركز المربع وعليه هي نقطة منتصف القطر $\overrightarrow{AC}$

$$M = \left(\frac{1+9}{2}, \frac{1-7}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (5, -3, 1)$$



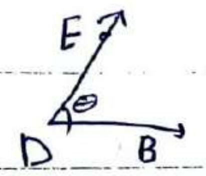
$$\overrightarrow{MA} = \langle 1-5, 1+3, -1-1 \rangle = \langle -4, 4, -2 \rangle$$

$$\overrightarrow{ME} = \langle 8-5, 3+3, 7-1 \rangle = \langle 3, 6, 6 \rangle$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{ME} = (-4)(3) + (4)(6) + (-2)(6)$$
$$= -12 + 24 - 12 = 0$$

بما أن $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{ME} = 0$ فإن $\overrightarrow{ME} \perp \overrightarrow{MA}$ ((متعامدان)) وعليه $m\angle AME = 90^\circ$

3)



$$\overrightarrow{DE} = \langle 8-1, 3+5, 7-5 \rangle = \langle 7, 8, 2 \rangle$$

$$\overrightarrow{DB} = \langle 9-1, -1+5, -3-5 \rangle = \langle 8, 4, -8 \rangle$$

$$|\overrightarrow{DE}| = \sqrt{49+64+4} = \sqrt{117}, \quad |\overrightarrow{DB}| = \sqrt{64+16+64} = 12$$

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DB} = (7)(8) + (8)(4) + (2)(-8) = 56 + 32 - 16 = 72$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{72}{12\sqrt{117}}\right) \simeq 56.3^\circ$$

4) حجم الهرم يساوي ثلث مساحة القاعدة في ارتفاعه

القاعدة مربع ومساحة المربع هو مربع طول ضلعه

$$AB = \sqrt{(9-1)^2 + (-1-1)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{64+4+4} = \sqrt{72}$$

ارتفاع الهرم هو طول العمود المرسوم من الرأس E الى قاعدته وهو

EM حيث M هو نقطة منتصف احد قطري القاعدة المربعة

$$EM = \sqrt{(5-8)^2 + (-3-3)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{9+36+36} = 9$$

$$\text{Area} = \frac{1}{3}\underbrace{\left(\sqrt{72}\right)^2}_{\text{مساحة المربع}}(9) = (3)(72) = 216$$

رافت ضابح

التدرب وحل المسائل

جد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي :-

1) $\vec{u} = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{v} = 7\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$

2) $\vec{u} = 4\hat{i} - 8\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{v} = 12\hat{i} + 9\hat{j} - 8\hat{k}$

3) $\vec{u} = \langle -5, 9, 17 \rangle$, $\vec{v} = \langle 4, 6, -2 \rangle$

4) $\vec{u} = \langle 1, -4, 12 \rangle$, $\vec{v} = \langle 3, 10, -5 \rangle$

الحل :-

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (5)(7) + (-4)(6) + (3)(-2) = 35 - 24 - 6 = 5$

2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (4)(12) + (-8)(9) + (-3)(-8) = 48 - 72 + 24 = 0$

3) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-5)(4) + (9)(6) + (17)(-2) = -20 + 54 - 34 = 0$

4) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (1)(3) + (-4)(10) + (12)(-5) = 3 - 40 - 60 = -97$

جد قياس الزاوية θ بين المتجهين لأقرب عشر درجة

5) $\vec{m} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$, $\vec{n} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$

الحل :-

$\vec{m} \cdot \vec{n} = (4)(3) + (-2)(4) + (5)(-2)$
$= 12 - 8 - 10 = -6$

$|\vec{m}| = \sqrt{16 + 4 + 25} = \sqrt{45}$

$|\vec{n}| = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{\sqrt{29}\sqrt{45}}\right)$

$\theta \simeq 99.6^\circ$

6) $\vec{v} = \langle 3, -2, 9 \rangle$, $\vec{w} = \langle 5, 3, -4 \rangle$

الحل :-

$\vec{v} \cdot \vec{w} = (3)(5) + (-2)(3) + (9)(-4)$
$= 15 - 6 - 36 = -27$

$|\vec{v}| = \sqrt{9 + 4 + 81} = \sqrt{94}$

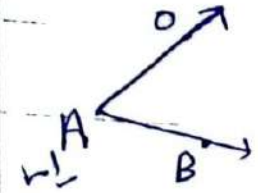
$|\vec{w}| = \sqrt{25 + 9 + 16} = \sqrt{50}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-27}{\sqrt{94}\sqrt{50}}\right)$

$\theta \simeq 113.2^\circ$

رافت صباح

7) اذا كانت $A(3,5,-4)$ و $B(7,4,-3)$ و O نقطة الاصل جد $m\angle OAB$ الى اقرب درجة



الحل:

$$\overrightarrow{AO} = \langle 0-3, 0-5, 0+4 \rangle$$
$$= \langle -3, -5, 4 \rangle$$
$$\overrightarrow{AB} = \langle 7-3, 4-5, -3+4 \rangle$$
$$= \langle 4, -1, 1 \rangle$$
$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AB} = (-3)(4) + (-5)(-1) + (4)(1)$$
$$= -12 + 5 + 4 = -3$$
$$|\overrightarrow{AO}| = \sqrt{9+25+16} = \sqrt{50}$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+1+1} = \sqrt{18}$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{50}\sqrt{18}}\right) \simeq 96^\circ$$

---

8) يمر المستقيم L_1 بالنقطتين $(-3,5,7)$ و $(2,-1,4)$ ويمر المستقيم L_2 بالنقطتين $(1,2,-1)$ و $(6,-5,3)$ جد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم L_2 والمستقيم L_1 الى اقرب جزء من عشرة

الحل:

اتجاه المستقيم L_1 هو: $\vec{V} = \langle -3-2, 5+1, 7-4 \rangle = \langle -5, 6, 3 \rangle$

اتجاه المستقيم L_2 هو: $\vec{W} = \langle 1-6, 2+5, -1-3 \rangle = \langle -5, 7, -4 \rangle$

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = (-5)(-5) + (6)(7) + (3)(-4) = 25 + 42 - 12 = 55$$ (حادة)

$$|\vec{V}| = \sqrt{25+36+9} = \sqrt{70}, \quad |\vec{W}| = \sqrt{25+49+16} = \sqrt{90}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{55}{\sqrt{70}\sqrt{90}}\right) \simeq 46.1^\circ$$

رافت صابجي

9) اذا كان المستقيم الذي له المعادلة المتجهة :-

$\vec{r}=\langle 1,4,-5\rangle+\lambda\langle -6,g+5,3\rangle$ والمستقيم الذي له المعادلة

المتجهة $\vec{r}=\langle 1,4,-5\rangle+\mu\langle 5,g-6,-4\rangle$ متعامدين ، فما القيم الممكنة للثابت g

الحل :-

اتجاه المستقيم الاول : $\langle -6, g+5, 3\rangle$

اتجاه المستقيم الثاني : $\langle 5, g-6, -4\rangle$

المستقيمان متعامدان ، فاتجاههما متعامدان وعليه $\vec{V}\cdot\vec{U}=0$

$(-6)(5)+(g+5)(g-6)+(3)(-4)=0$

$-30+g^2-6g+5g-30-12=0$

$g^2-g-72=0$

$(g-9)(g+8)=0$

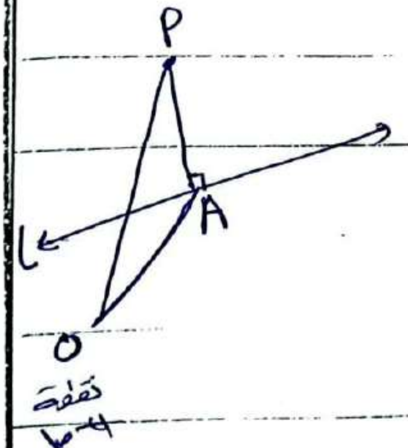
$g=9,\ g=-8$

اذا كانت $\vec{r}=2\hat{j}-3\hat{k}+t(-\hat{i}+2\hat{j}+5\hat{k})$ معادلة متجهة المستقيم l

والنقطة $P(-2,22,5)$ غير واقعة على المستقيم l أجب عن السؤالين :

10) جد مقطع العمود من النقطة P على المستقيم l

11) جد البعد بين النقطة P والمستقيم l



الحل :

10) نجهز $\vec{PA}=\vec{OA}-\vec{OP}$

$\vec{OP}=\langle -2,22,5\rangle$

$\vec{OA}=\langle -t,2+2t,-3+5t\rangle$

$\vec{PA}=\langle -t,2+2t,-3+5t\rangle-\langle -2,22,5\rangle$

$\vec{PA}=\langle -t+2,-20+2t,-8+5t\rangle$

بما أن $\vec{PA}\perp l$ فان :- $\vec{AP}\cdot\langle -1,2,5\rangle=0$

$\langle -t+2, -20+2t, -8+5t\rangle \cdot \langle -1, 2, 5\rangle = 0$

$(t-2) + (-40+4t) + (-40+25t) = 0$

$30t - 82 = 0 \rightarrow 30t = 82 \rightarrow t = \frac{82}{30} = \frac{41}{15}$

$\overrightarrow{OA} = \langle -\frac{41}{15}, 2+\frac{82}{15}, -3+\frac{205}{15}\rangle = \langle -\frac{41}{15}, \frac{112}{15}, \frac{32}{3}\rangle$

وعليه مسقط العمود من P على المستقيم l هو $\left(\frac{-41}{15}, \frac{112}{15}, \frac{32}{3}\right)$

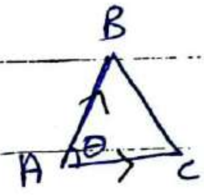
11) البعد هو طول القطعة المستقيمة من P إلى A

$\overrightarrow{AP} = \langle -2+\frac{41}{15}, 22-\frac{112}{5}, 5-\frac{32}{3}\rangle$

$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{\left(-2+\frac{41}{15}\right)^2 + \left(22-\frac{112}{5}\right)^2 + \left(5-\frac{32}{3}\right)^2} \approx 15.6$

12) جد مساحة المثلث ABC حيث $\overrightarrow{AB} = \langle 4, 9, 1\rangle$ ، $\overrightarrow{AC} = \langle 9, 1, 4\rangle$

الحل: نجد الزاوية θ



$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = (9)(4) + (1)(9) + (4)(1) = 36+9+4 = 49$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{81+1+16} = \sqrt{98}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+81+1} = \sqrt{98}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{49}{\sqrt{98}\sqrt{98}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$

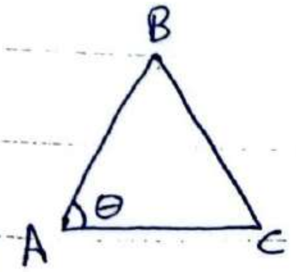
$\text{Area} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{98})(\sqrt{98})\sin 60^\circ = \frac{49\sqrt{3}}{2}$

رأفت ضاحي

13) جد مساحة المثلث ABC الذي احداثيات رؤوسه هيا

$A(1,3,1)$, $B(2,7,-3)$, $C(4,-5,2)$



الحل:- نجد الزاوية θ

$$\overrightarrow{AB} = \langle 2-1, 7-3, -3-1 \rangle = \langle 1, 4, -4 \rangle$$
$$\overrightarrow{AC} = \langle 4-1, -5-3, 2-1 \rangle = \langle 3, -8, 1 \rangle$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (1)(3) + (4)(-8) + (-4)(1)$$
$$= 3 - 32 - 4 = -33$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+16+16} = \sqrt{33}$$
$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9+64+1} = \sqrt{74}$$
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-33}{\sqrt{33}\,\sqrt{74}}\right) \simeq 131.2^\circ$$
$$\text{Area} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{33}\,\sqrt{74}\,\sin 131.2$$
$$\simeq 18.6$$

ملاحظة: نستطيع ايجاد $\sin\theta$ من $\cos\theta$ من المتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

---

(14) يمثل المتجه $\vec{F} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ القوة التي يولدها حزام ناقل لتحريك حقيبة في مسار مستقيم من النقطة $(1,1,1)$ الى النقطة $(9,4,7)$ جد مقدار الشغل الذي تبذله القوة F ، علماً بان القوة بالنيوتن N والمسافة بالمتر m ومقدار الشغل W المبذول بوحدة الجول (J) يساوي ناتج الضرب القياسي لمتجه القوة في متجه الازاحة أي :-

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

الحل:-

$$\vec{d} = \langle 9-1, 4-1, 7-1 \rangle = \langle 8, 3, 6 \rangle$$
$$\vec{F} = \langle 5, -3, 1 \rangle$$
$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = (8)(5) + (3)(-3) + (6)(1) = 40 - 9 + 6$$
$$= 37$$

هنا d الازاحة

رافت صابحي

15) إذا كانت النقطة $R(27,-17,-1)$ والنقطة $S(11,-9,11)$ تقعان على المستقيم L وكانت النقطة Q تقع على المستقيم L حيث $\overline{OQ}$ عمودي على L ، جد متجه الموقع للنقطة Q

الحل:

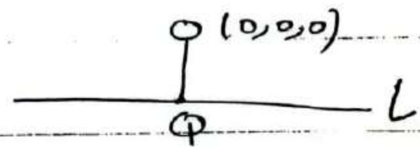
نجد معادلة المستقيم L $\quad$ نبسط

$$\vec{V}=\langle 27-11,-17+9,-1-11\rangle=\langle 16,-8,-12\rangle$$
$$=\langle 4,-2,-3\rangle$$
$$\vec{r}=\langle 11,-9,11\rangle+t\langle 4,-2,-3\rangle$$

النقطة Q هي المسقط العمودي على هذا المستقيم فيكون متجه موقعها هو $\overline{OQ}$

$$\overrightarrow{OQ}=\langle 11+4t,-9-2t,11-3t\rangle$$
حيث Q تحقق معادلة المستقيم

$$\overrightarrow{OQ}\cdot\vec{V}=0$$
$$\langle 11+4t,-9-2t,11-3t\rangle\cdot\langle 4,-2,-3\rangle=0$$
$$4(11+4t)+-2(-9-2t)+-3(11-3t)=0$$
$$44+16t+18+4t-33+9t=0$$
$$29t=-29\rightarrow t=-1$$
$$\overrightarrow{OQ}=\langle 11-4,-9+2,11+3\rangle=\langle 7,-7,14\rangle$$



إذا كانت متجهات مواقع النقاط: A و B و D هي $\begin{pmatrix}-4\\13\\22\end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix}4\\17\\14\end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix}2\\-29\\7\end{pmatrix}$ على الترتيب. أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعاً:

16) اثبت أن $\overline{AB}\perp\overline{AD}$

17) جد متجه موقع النقطة C إذا كان ABCD مستطيلاً

18) جد مساحة المستطيل ABCD

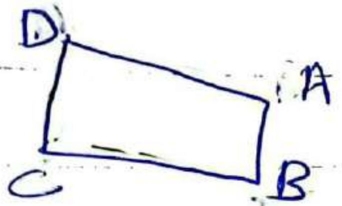
19) جد متجه موقع مركز المستطيل ABCD

رافت ضايق

الحل:
$A\langle -4, 13, 22\rangle$
$B\langle 4, 17, 14\rangle$
$D\langle 2, -29, 7\rangle$

16)

$$\overrightarrow{AB} = \langle 4+4, 17-13, 14-22\rangle = \langle 8, 4, -8\rangle$$
$$\overrightarrow{AD} = \langle 2+4, -29-13, 7-22\rangle = \langle 6, -42, -15\rangle$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = (8)(6) + (4)(-42) + (-8)(-15)$$
$$= 48 - 168 + 120 = 0$$



17) عندما نرسم شكل تقريبي المهم هو ترتيب رؤوس المستطيل حسب عقارب الساعة او عكس عقارب الساعة

المطلوب $\overrightarrow{OC}$

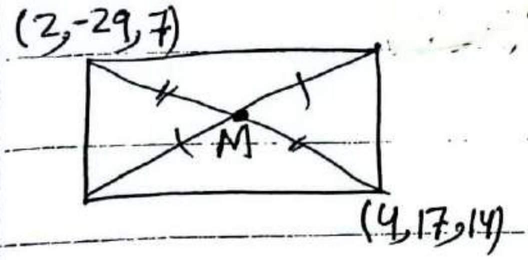
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
لأنه مستطيل

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$
$$\langle 6, -42, -15\rangle = \overrightarrow{OC} - \langle 4, 17, 14\rangle$$
$$\overrightarrow{OC} = \langle 6, -42, -15\rangle + \langle 4, 17, 14\rangle = \langle 10, -25, -1\rangle$$

!! يوجد اكثر من طريقة للحل !! يمكن تحليل/توازي

18) مساحة المستطيل هو الطول مضروب بالعرض

$$Area = |\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AD}| = \left(\sqrt{64+16+64}\right)\left(\sqrt{36+1764+225}\right)$$
$$= (12)(45) = 540$$



19) قطرا المستطيل ينصف كل منهما الآخر

$$M = \left(\frac{4+2}{2}, \frac{17-29}{2}, \frac{14+7}{2}\right)$$
$$M = \left(3, -6, \frac{21}{2}\right)$$
$$\overrightarrow{OM} = \left\langle 3, -6, \frac{21}{2}\right\rangle$$

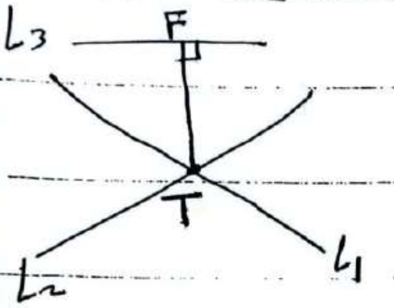
تمثل: $\vec{r} = \langle -5, 7, 1\rangle + t\langle 3, 1, 4\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 وتمثل

$\vec{r} = \langle 2, 8, -1\rangle + u\langle 2, 0, -3\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 وتمثل

$\vec{r} = \langle 3, 19, 10\rangle + v\langle -1, 3, 1\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_3:

اذا تقاطع المستقيم l_2 والمستقيم l_1 في النقطة T وكانت النقطة

F تقع على المستقيم l_3 حيث $\overrightarrow{TF} \perp l_3$ أجب عما يلي:



20) جد احداثيات النقطة F

21) جد البعد بين النقطة T والمستقيم l_3

الحل:

بما أن T هي نقطة تقاطع l_2 و l_1 وعليه نساوي $\vec{r}$ في كلا المعادلتين

$$\langle -5+3t, 7+t, 1+4t\rangle = \langle 2+2u, 8, -1-3u\rangle$$

نشكل معادلات:

$-5+3t = 2+2u$ — (1)

$7+t = 8 \rightarrow t = 1$ — (2)

$1+4t = -1-3u$ — (3)

نعوض $t=1$ في معادلة (1):

$-5+3 = 2+2u \rightarrow u = -2$

نعوض في معادلة (3): $1+4 = -1+6$ ✓

وعليه المستقيمان متقاطعان

نقطة التقاطع

$T(-5+3, 7+1, 1+4)$

$T(-2, 8, 5)$

فكرة السؤال هو عدم اعطاء النقطة الخارجة عن المستقيم

نتبع نفس أسلوب المسقط!!

F هي مسقط عمودي للنقطة T على المستقيم l_3

احداثيات F $(3-v, 19+3v, 10+v)$ لأنها تقع على المستقيم وتحقق معادلته

$\overrightarrow{TF} \perp l_3 \rightarrow \overrightarrow{TF} \perp \langle -1, 3, 1\rangle$

$\overrightarrow{TF} = \langle 3-v+2, 19+3v-8, 10+v-5\rangle$

$\overrightarrow{TF} = \langle 5-v, 11+3v, 5+v\rangle$

$(5-v)(-1) + (11+3v)(3) + (5+v)(1) = 0$

$\boxed{v = -3}$

احداثيات F هو:

$(3+3, 19-9, 10-3)$

$(6, 10, 7)$

رافت ضاحي

21) المطلوب هو القطعة المستقيمة TF

$$TF = \sqrt{(6+2)^2 + (10-8)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{64+4+4} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

اذا كانت $\vec{r} = \langle 5, 3, 0 \rangle + \lambda \langle -1, 3, 1 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم ℓ

وكانت $A(3,-2,1)$ و $B(5,3,0)$ أجب عن السؤالين الآتيين تماماً:

22) جد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم $\overrightarrow{AB}$ والمستقيم ℓ

23) تقع النقطة C على المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ حيث $AB = AC$ جد إحداثيات C

الحل:

$$\overrightarrow{AB} = \langle 5-3, 3+2, 0-1 \rangle = \langle 2, 5, -1 \rangle$$

اتجاه المستقيم ℓ هو $\vec{V} = \langle -1, 3, 1 \rangle$

22)

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{V} = (2)(-1) + (5)(3) + (-1)(1) = -2 + 15 - 1 = 12$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+25+1} = \sqrt{30} \text{ و } |\vec{V}| = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{12}{\sqrt{30}\sqrt{11}}\right) \approx 48.7^\circ$$

23) بما أن $AB = AC$ إذن A منتصف AC

$$\left(\frac{5+x}{2}, \frac{3+y}{2}, \frac{z}{2}\right) = (3, -2, 1)$$

بالمقارنة:

$$\frac{5+x}{2} = 3 \rightarrow x = 1$$

$$\frac{3+y}{2} = -2 \rightarrow y = -7$$

$$\frac{z}{2} = 1 \rightarrow z = 2$$

احداثيات C هو $(1, -7, 2)$

تقع النقطة $A(-7,-4,9)$ والنقطة $B(8,5,3)$ على المستقيم l_1

وتقع النقطة $C(6,11,7)$ على المستقيم l_2 الذي معادلته

$$\vec{r} = \langle 6,11,7\rangle + t\langle -1,3,2\rangle$$

(24) بيّن أن النقطة B تقع على المستقيم l_2

(25) بيّن أن المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متعامدان

(26) جد $m\angle ABC$

(27) جد مساحة المثلث ABC

الحل:

(24) نعوض بدل $\vec{r}$

$$\langle 8,5,3\rangle = \langle 6-t, 11+3t, 7+2t\rangle$$

$6-t=8 \rightarrow t=-2$

$11+3t=5 \rightarrow t=-2$

$7+2t=3 \rightarrow t=-2$

نفس القيمة

بما أن لهذه المعادلات الحل نفسه فإن النقطة B تقع على المستقيم l_2

(25) اتجاه l_1 هو

$$\overrightarrow{AB} = \langle 8+7, 5+4, 3-9\rangle$$

$$= \langle 15, 9, -6\rangle$$

$$= \langle 5, 3, -2\rangle$$

بسط

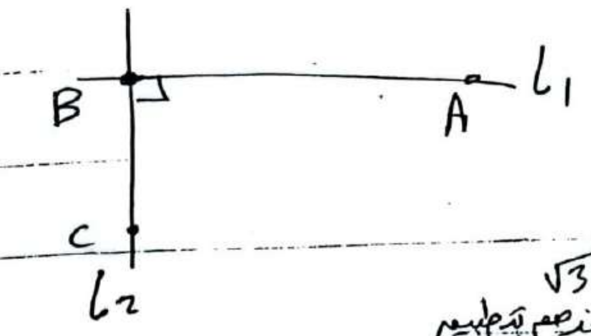
اتجاه l_2 هو $\vec{v} = \langle -1,3,2\rangle$

لإثبات أن L_1 و L_2 متعامدان نستخدم الضرب القياسي

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{V} = (5)(-1)+(3)(3)+(-2)(2) = -5+9-4 = 0$$

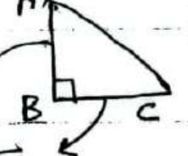
بما أن $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{V} = 0$ فإنهما متعامدان

(26)



$$m\angle ABC = 90^\circ$$

(27)



$\sqrt{342}$

$\sqrt{56}$

$$Area = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{342}\sqrt{56}$$

$$\approx 69.2$$

نخصم بتطبيق التعريف نقطتين

رافت ضاحي

ABCD هرم ثلاثي ، اذا كانت احداثيات رؤوسه هي

$A(4,3,-1)$, $B(-4,5,2)$, $C(6,-1,0)$, $D(10,11,19)$

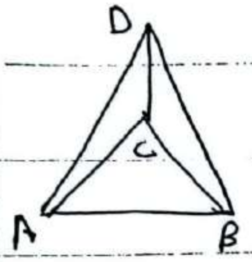
اجب عن الاسئلة الآتية :

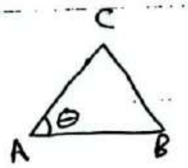
(28) جد مساحة المثلث ABC في صورة $a\sqrt{6}$

(29) اثبت ان $m\angle AED = 90^\circ$ حيث $E(1,2,1)$

(30) اذا علمت ان النقطة E تقع في المستوى نفسه الذي تقع فيه المثلث ABC

جد حجم الهرم ABCD .





الحل :

$\overrightarrow{AB} = \langle -4-4, 5-3, 2+1 \rangle = \langle -8, 2, 3 \rangle$

$\overrightarrow{AC} = \langle 6-4, -1-3, 0+1 \rangle = \langle 2, -4, 1 \rangle$

(28

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -16 + -8 + 3 = -21$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{64+4+9} = \sqrt{77}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-21}{\sqrt{77}\sqrt{21}}\right) \simeq 121.5^\circ$

مساحة المثلث $\text{Area} = \frac{1}{2}|AB||AC|\sin\theta$

$= \frac{1}{2}\sqrt{77}\sqrt{21}\sin 121.5$

$\simeq 17.14 \simeq 7\sqrt{6}$

لكن السؤال طالب في صورة $a\sqrt{6}$

توجد طريقة مختلفة ، لحل السؤال وهو ايجاد $\sin\theta$

دون ايجاد قيمة الزاوية θ

بسط اولاً ان امكن

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-21}{\sqrt{77}\sqrt{21}}\right) \rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{21}}{\sqrt{77}}\right)$

$\theta = \cos^{-1}\sqrt{\frac{21}{77}} = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\right)$

ناخذ cos للطرفين :

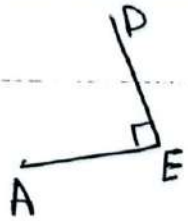
$\cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$

متطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{3}{11}} = \sqrt{\frac{8}{11}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$

$A = \frac{1}{2}\sqrt{77}\sqrt{21}\,\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = 7\sqrt{6}$

رافت صافي



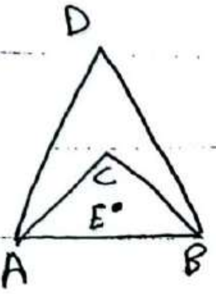
29) نفكر بالضرب القياسي

$\overrightarrow{EA} = \langle 4-1, 3-2, -1-1 \rangle = \langle 3, 1, -2 \rangle$

$\overrightarrow{ED} = \langle 10-1, 11-2, 19-1 \rangle = \langle 9, 9, 18 \rangle$

$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{ED} = 27 + 9 - 36 = 0$

وعليه $\overrightarrow{EA} \perp \overrightarrow{ED}$ وعليه $m\angle AED = 90^\circ$



30) ارتفاع الهرم $|\overrightarrow{ED}| = \sqrt{81+81+324}$

$= \sqrt{486}$

مساحة قاعدة المثلث هنا نفسها مساحة المثلث ABC

وعليه $= \left(\frac{1}{3}\right)(7\sqrt{6})(\sqrt{486})$

126

اذا كانت $A(3, 1, -6)$ و $B(5, -2, 0)$ و $C(8, -4, -6)$

اجب عن الاسئلة الاتية :

31) بيّن ان $\overrightarrow{AC} = n\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ حيث n عدد صحيح

32) بيّن ان قياس لزاوية ACB هو $\cos^{-1}\frac{5\sqrt{2}}{14}$

33) اكتب معادلة متجهة المستقيم $\overleftrightarrow{AC}$

34) اذا كانت $D(6, -1, p)$ وعلم ان $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$ متعامدان فما قيمة p

35) بيّن ان الشكل $ABCD$ معين ثم جد طول كل ضلع من اضلاعه.

الحل :-

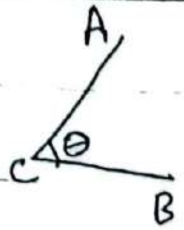
31) $\overrightarrow{AC} = \langle 8-3, -4-1, -6+6 \rangle = \langle 5, -5, 0 \rangle$

$= 5\langle 1, -1, 0 \rangle$

$\overrightarrow{AC} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

هنا $n = 5$

رافت ضايع



32) $\overrightarrow{CA} = \langle 3-8, 1+4, -6+6 \rangle = \langle -5, 5, 0 \rangle$

$\overrightarrow{CB} = \langle 5-8, -2+4, 0+6 \rangle = \langle -3, 2, 6 \rangle$

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15 + 10 + 0 = 25$

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{9+4+36} = 7$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} \right) = \cos^{-1} \frac{25}{(5\sqrt{2})(7)} = \cos^{-1} \frac{5}{7\sqrt{2}}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{7\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) = \cos^{-1} \frac{5\sqrt{2}}{14}$

بسط

33) المتجه الموازي

$\overrightarrow{AC} = \langle 5, -5, 0 \rangle$

$= \langle 1, -1, 0 \rangle$

نكتب المعادلة

$\vec{r} = \langle 8, -4, -6 \rangle + t \langle 1, -1, 0 \rangle$

---

34) نكتب معادلة $\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{BD} = \langle 6-5, -1+2, P \rangle = \langle 1, 1, P \rangle$

$\vec{r} = \langle 5, -2, 0 \rangle + u \langle 1, 1, P \rangle$

المستقيمان متقاطعان :

نساوي $\vec{r}$ معاً

$\langle 8+t, -4-t, -6 \rangle = \langle 5+u, -2+u, uP \rangle$

$8 + t = 5 + u$ — (1)

$-4 - t = -2 + u$ — (2)

$-6 = uP$ — (3)

بحل المعادلتين (1) مع (2)

ينتج $t = -\frac{5}{2}, u = \frac{1}{2}$

نعوض في معادلة (3) :

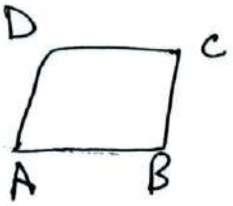
$-6 = \frac{1}{2} P$

$\boxed{P = -12}$

وعليه احداثي D هو $(6, -1, -12)$

رأفت صابحي

35) المعين هو متوازي أضلاع جميع أضلاعه متساوية



لإثبات أن الشكل معينًا :

1) نثبت أنه متوازي أضلاع

2) يوجد ضلعان متجاوران متساويان بالقياس

$\overrightarrow{AB} = \langle 5-3, -2-1, 0+6 \rangle = \langle 2, -3, 6 \rangle$

$\overrightarrow{DC} = \langle 8-6, -4+1, -6+12 \rangle = \langle 2, -3, 6 \rangle \rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{BC} = \langle 8-5, -4+2, -6-0 \rangle = \langle 3, -2, -6 \rangle \longrightarrow \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AD} = \langle 6-3, -1-1, -12+6 \rangle = \langle 3, -2, -6 \rangle$

وعليه الشكل متوازي أضلاع

نجد طول ضلعان غير متقابلان

$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+9+36} = 7$

$AD = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{9+4+36} = 7$

وعليه الشكل معينًا لأنه متوازي أضلاع وفيه ضلعان متجاوران متطابقان

---

36) أطلق صاروخ من النقطة (1,2,1)، ثم وصل بعد ثانيتين إلى النقطة (9,13,21) وفي الوقت نفسه، أطلق صاروخ آخر من النقطة (4,-3,2) ووصل بعد ثانيتين إلى النقطة (14,1,18) ما قياس الزاوية بين مساري الصاروخين

الحل :

اتجاه مسار الصاروخ الأول $\vec{v} = \langle 9-1, 13-2, 21-1 \rangle = \langle 8, 11, 20 \rangle$

اتجاه مسار الصاروخ الثاني $\vec{u} = \langle 14-4, 1+3, 18-2 \rangle = \langle 10, 4, 16 \rangle$

$\vec{v} \cdot \vec{u} = 80 + 44 + 320 = 444$

$|\vec{v}| = \sqrt{64+121+400} = \sqrt{585}$

$|\vec{u}| = \sqrt{100+16+256} = \sqrt{372}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{444}{\sqrt{585}\sqrt{372}}\right)$

$\theta \simeq 17.9^\circ$

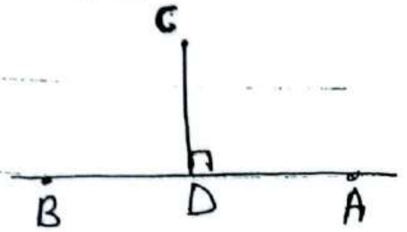
رافت ضاحي

37) اذا كانت $A(3,-2,4)$ ، و $B(1,-5,9)$ ، و $C(-4,5,-1)$

وكانت النقطة D تقع على المستقيم المار بالنقطة A والنقطة B

وكانت الزاوية CDA قائمة ، فما احداثيات النقطة D

الحل :-



النقطة D هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$

نجد معادلة المستقيم المار بـ A و B

$$\overrightarrow{AB} = \langle 1-3, -5+2, 9-4 \rangle = \langle -2, -3, 5 \rangle$$

$$\vec{r} = \langle 3, -2, 4 \rangle + t\langle -2, -3, 5 \rangle$$

احداثيات D هي $(3-2t, -2-3t, 4+5t)$ كنقطة تقع على المستقيم

$$\overrightarrow{CD} = \langle 3-2t+4, -2-3t-5, 4+5t+1 \rangle$$

$$\overrightarrow{CD} = \langle 7-2t, -7-3t, 5+5t \rangle$$

$$\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB} \rightarrow \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\langle 7-2t, -7-3t, 5+5t \rangle \cdot \langle -2, -3, 5 \rangle = 0$$

$$-2(7-2t) + -3(-7-3t) + 5(5+5t) = 0$$

بفك الأقواس وحل المعادلة ينتج $t = \frac{-16}{19}$

وعليه احداثيات D

$$\left(3-2\left(\frac{-16}{19}\right), -2-3\left(\frac{-16}{19}\right), 5+5\left(\frac{-16}{19}\right)\right)$$

$$\left(\frac{89}{19}, \frac{10}{19}, \frac{-4}{19}\right)$$

اذا كانت $\vec{r} = \begin{pmatrix}-8\\16\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}7\\-3\\-6\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1

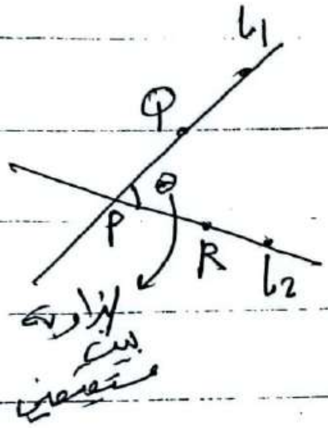
وكانت $\vec{r} = \begin{pmatrix}-10\\31\\-26\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}3\\-6\\7\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2

وتقاطع هذان المستقيمان في النقطة P وكانت النقطة Q تقع على المستقيم l_1 حيث $t=3$ والنقطة R تقع على المستقيم l_2 حيث $u>3$ و $PQ = PR$ اجب عن السؤالين :

38) اذا كان $m\angle RPQ = \theta$ بيّن ان $\cos\theta = \frac{-3}{94}$

39) بيّن ان مساحة المثلث PQR هي $2\sqrt{8827}$

الحل :



38) اتجاه l_1 ⟵ $\vec{v_1} = \begin{pmatrix}7\\-3\\-6\end{pmatrix}$

اتجاه l_2 ⟵ $\vec{v_2} = \begin{pmatrix}3\\-6\\7\end{pmatrix}$

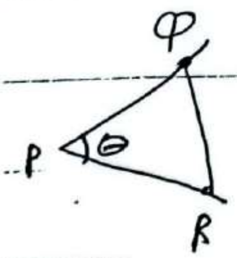
$$\vec{v_1}\cdot\vec{v_2} = 21 + 18 - 42 = -3$$

$$|\vec{v_1}| = \sqrt{49+9+36} = \sqrt{94}$$

$$|\vec{v_2}| = \sqrt{9+36+49} = \sqrt{94}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{\sqrt{94}\sqrt{94}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{94}\right)$$

ناخذ cos للطرفين $\cos\theta = \frac{-3}{94}$



39) هنا نحتاج معرفة $\underbrace{|\vec{PQ}| \text{ و } |\vec{PR}|}_{\text{متساويات}}$ بخواصه فهم

نجد النقطة Q وهي تقع على l_1 عند $t=3$

$$Q = \begin{pmatrix}-8+7(3)\\16+-3(3)\\1+-6(3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\7\\-17\end{pmatrix}$$

P هي نقطة تقاطع المستقيمين وهنا خاري $\vec{r_1}$

$$\langle -8+7t, 16-3t, 1-6t\rangle = \langle -10+3u, 31-6u, -26+7u\rangle$$

$-8+7t = -10+3u$ — ①
$16-3t = 31-6u$ — ②
$1-6t = -26+7u$ — ③

بحل معادلة ① مع ② ينتج :-
$t = 1 \;,\; u = 3$

نعوضها في معادلة ③ :-
$1-6t = -26+7u$
$1-6 = -26+21$ ✓

نعوض $t=1$ لمعرفة P ←
$$P(-8+7, 16-3, 1-6) = (-1, 13, -5)$$

$$\vec{PQ} = \langle 13+1, 7-13, -17+5\rangle = \langle 14, -6, -12\rangle$$
$$|\vec{PQ}| = \sqrt{196+36+144} = \sqrt{376}$$

نحتاج الى $\sin\theta$ حيث نجدها كالتالي :-

$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\left(\frac{3}{94}\right)^2$$
$$= \frac{\sqrt{8827}}{94}$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}|\vec{PQ}||\vec{PR}|\sin\theta$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{376}\,\sqrt{376}\,\frac{\sqrt{8827}}{94}$$
$$= 2\sqrt{8827}$$

رافت صبابحة

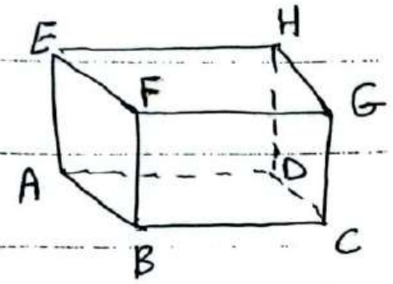
رسم متوازي المستطيلات الآتي باستعمال برمجية حاسوبية تعتمد في قياساتها على المتجهات، فكانت كالآتي :-

$\overrightarrow{AB}=(2\hat{i}+4\hat{j}+4\hat{k})$, $\overrightarrow{AD}=(-10\hat{i}+10\hat{j}-5\hat{k})$, $\overrightarrow{AE}=(-6\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k})$

(40) إذا كانت $B(8,3,-2)$ جد إحداثيات النقطة H

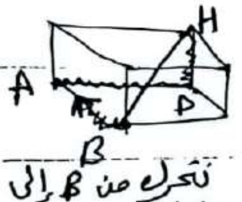
(41) جد قياس الزاوية GAC مقرباً إلى أقرب عشر درجة

(42) إذا كان X نقطة منتصف الضلع EF جد جيب تمام الزاوية DXC



الحل :-

بما أنه متوازي مستطيلات، فإن كل ضلعان متقابلان متوازيان



نفرض أن النقطة $H(x, y, z)$

(40) $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}$ نفس $\overrightarrow{AE}$

$\langle x-8, y-3, z+2\rangle=\langle -2,-4,-4\rangle+\langle -10,10,-5\rangle+\langle -6,-3,6\rangle$

$\langle x-8, y-3, z+2\rangle=\langle -18,3,-3\rangle$

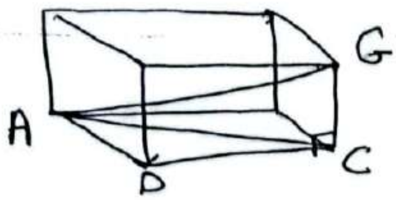
$x-8=-18 \rightarrow x=-10$

$y-3=3 \rightarrow y=6$

$z+2=-3 \rightarrow z=-5$

إحداثيات النقطة $H(-10,6,-5)$

(41)



المثلث ACG قائم الزاوية

$$\tan\theta = \frac{|CG|}{|\vec{AC}|} = \frac{|\vec{AE}|}{|\vec{AB}+\vec{AD}|}$$

$\vec{AC} = \vec{BC}$

$\vec{AC} = \vec{AB} + \underset{\downarrow\ \vec{AD}}{\vec{BC}}$

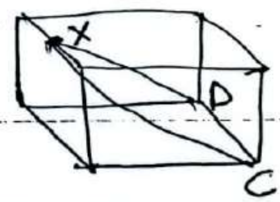
$$= \frac{|\langle -6,-3,6\rangle|}{|\langle 3,4,4\rangle + \langle -10,10,-5\rangle|}$$

$$= \frac{|\langle -6,-3,6\rangle|}{|\langle -8,14,-1\rangle|} = \frac{\sqrt{36+9+36}}{\sqrt{64+196+1}}$$

$$\tan\theta = \frac{9}{\sqrt{261}} = \frac{3}{\sqrt{29}}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{3}{\sqrt{29}} \simeq 29.1^\circ$$

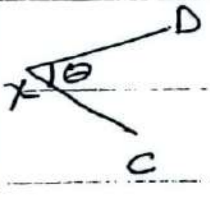
(42)



$$\vec{XD} = \vec{XE} + \vec{EA} + \vec{AD}$$

$$= \frac{1}{2}FE + \vec{EA} + \vec{AD}$$

معكوس AB



$$= \frac{1}{2}\langle -2,-4,-4\rangle + \langle 6,3,-6\rangle + \langle -10,10,-5\rangle$$

$$= \langle -1,-2,-2\rangle + \langle 6,3,-6\rangle + \langle -10,10,-5\rangle$$

$$\vec{XD} = \langle -5, 11, -13\rangle$$

$$|\vec{XD}| = \sqrt{25+121+169} = \sqrt{315}$$

$$\vec{XC} = \vec{XF} + \vec{FB} + \vec{BC}$$

$$\vec{XC} = \frac{1}{2}\vec{EF} + \vec{FB} + \vec{BC}$$

$$= \frac{1}{2}\langle 2,4,4\rangle + \langle 6,3,-6\rangle + \langle -10,10,-5\rangle = \langle -3, 15, -9\rangle$$

$$|\vec{XC}| = \sqrt{9+225+81} = \sqrt{315}$$

$$\vec{XD}\cdot\vec{XD} = (-5)(-3) + 11(15) + (-13)(-9) = 297$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{297}{\sqrt{315}\sqrt{315}}\right) \rightarrow \cos\theta = \frac{297}{315} = \frac{33}{35}$$

رافت صافي ٠٧٩٥٠٠٠٠٤٦٢

جد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي :

1) $\vec{u} = \langle 4, 5, -3 \rangle$, $\vec{v} = \langle -2, 3, -7 \rangle$

2) $\vec{e} = \begin{pmatrix} -13 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$

3) $\vec{m} = 7\hat{i} + 4\hat{j} - 9\hat{k}$, $\vec{n} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + 10\hat{k}$

الحل :

1) $(4)(-2) + (5)(3) + (-3)(-7) = -8 + 15 + 21 = 28$

2) $\vec{e} \cdot \vec{f} = (-13)(-2) + (8)(3) + (-5)(10) = 26 + 24 - 50 = 0$

3) $\vec{m} \cdot \vec{n} = (7)(2) + (4)(-5) + (-9)(10) = 14 - 20 - 90 = -96$

---

4) اذا كان المتجه $\vec{V} = \langle 6, 5, a \rangle$ يعامد المتجه $\vec{W} = \langle 15, 24, -7 \rangle$ ، جد (a)

الحل :

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = 0$$

$$(15)(6) + (24)(5) + (-7)(a) = 0$$

$$90 + 120 - 7a = 0$$

$$7a = 210 \longrightarrow a = \frac{210}{7} = 30$$

جد قياس الزاوية θ بين المتجهين الى اقرب عشر درجة

5) $\vec{a} = 5\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (5)(2) + (2)(-1) + (3)(-2)$$

$$= 10 - 2 - 6 = 2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{25 + 4 + 9} = \sqrt{38}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{38}}\right) \simeq 83.8^\circ$$

6) $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1)(-1) + (1)(-1) + (-1)(4)$$

$$= -1 - 1 - 4 = -6$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1 + 1 + 16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{3\sqrt{2}\sqrt{3}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{-6}{3\sqrt{6}}\right) \simeq 144.7^\circ$$

م. أفنان ابراهيم صافي

7) اذا كان المتجه $\vec{a} = \lambda\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ والمتجه $\vec{b} = \lambda\hat{i} + 4\hat{j} + \lambda\hat{k}$ متعامدين ، فما قيم λ

الحل :-

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\lambda^2 - 12 + 4\lambda = 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda - 12 = 0 \longrightarrow (\lambda + 6)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda = -6 \text{ و } \lambda = 2$$

---

8) اذا كانت $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1

وكانت $\vec{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 جد قياس

الزاوية الحادة بين هذين المستقيمين الى أقرب عشر درجة.

الحل :- اتجاه l_1 : $\vec{V} = \langle 2, -6, 3 \rangle$

اتجاه l_2 : $\vec{W} = \langle 3, -4, 12 \rangle$

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = (2)(3) + (-6)(-4) + (3)(12)$$

$$= 6 + 24 + 36$$

$$= 66 \text{ "حادة"}$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{4 + 36 + 9} = 7$$

$$|\vec{W}| = \sqrt{9 + 16 + 144} = 13$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{66}{(7)(13)}\right) \simeq 43.5^\circ$$

أ. ابراهيم صافي

(14) يمر المستقيم r_1 بالنقطتين $(-2, 11, 6)$ و $(3, -5, 9)$ ويمر المستقيم r_2 بالنقطتين $(-5, 9, 12)$ و $(4, 3, 8)$ جد قياس الزاوية الحادة بين هذين المستقيمين الى أقرب عشر درجة

الحل :-

اتجاه r_1 :- $\vec{v} = \langle 3+2, -5-11, 9-6 \rangle = \langle 5, -16, 3 \rangle$

اتجاه r_2 :- $\vec{w} = \langle 4+5, 3-9, 8-12 \rangle = \langle 9, -6, -4 \rangle$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = 45 + 96 - 12 = 129$

$|\vec{v}| = \sqrt{25 + 256 + 9} = \sqrt{290}$ و $|\vec{w}| = \sqrt{81 + 36 + 16} = \sqrt{133}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{129}{\sqrt{290}\sqrt{133}}\right) \simeq 48.9°$

(15) اذا كان قياس الزاوية بين المتجه $\langle v, 0, -1 \rangle$ والمتجه $\langle 2, -1, 0 \rangle$ هو $60°$ جد قيمة v

الحل :-

$\vec{m} = \langle v, 0, -1 \rangle$ و $\vec{n} = \langle 2, -1, 0 \rangle$

$\vec{m} \cdot \vec{n} = 2v$

$|\vec{m}| = \sqrt{v^2 + 1}$, $|\vec{n}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$\cos\theta = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}$

$\cos 60° = \frac{2v}{\sqrt{5}\sqrt{v^2+1}}$ تبادل

$\frac{1}{2}\sqrt{5}\sqrt{v^2+1} = 2v$ نضرب بـ (2) ثم نربع

$5(v^2+1) = 16v^2$

$16v^2 - 5v^2 = 5$

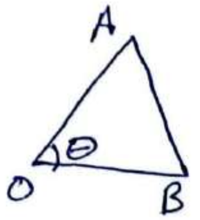
$11v^2 = 5 \longrightarrow v^2 = \frac{5}{11} \longrightarrow v = \sqrt{\frac{5}{11}}$ و $-\sqrt{\frac{5}{11}}$

مرفوضة لان الزاوية حادة

لوكانت سالب

$\vec{m} \cdot \vec{n} = 2v$

(11) اذا كان $A(3,-2,6)$ وكان $B(-5,4,1)$ جد مساحة المثلث AOB حيث O نقطة الاصل



الحل :-

$$\overrightarrow{OA} = \langle 3-0, -2-0, 6-0 \rangle = \langle 3, -2, 6 \rangle$$

$$\overrightarrow{OB} = \langle -5-0, 4-0, 1-0 \rangle = \langle -5, 4, 1 \rangle$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -15 - 8 + 6 = -17$$

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{9+4+36} = 7$$

$$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{25+16+1} = \sqrt{42}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-17}{7\sqrt{42}}\right) \simeq 112^\circ$$

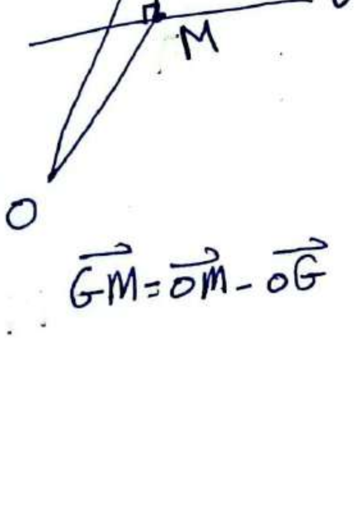
$$\text{Area} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}| \sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}(7)(\sqrt{42}) \sin 112^\circ \simeq 21.03$$

اذا مر المستقيم l بالنقطتين $E(-3,7,12)$ و $F(1,-3,5)$ وكانت النقطة $G(0,-6,4)$ لا تقع على المستقيم l فجد :-

(12) مسقط العمود من النقطة G على المستقيم l

(13) البعد بين النقطة G والمستقيم l.



$$\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OG}$$

الحل :-

نجد معادلة المستقيم l

اتجاه المستقيم

$$\overrightarrow{EF} = \langle 1+3, -3-7, 5-12 \rangle$$

$$\overrightarrow{EF} = \langle 4, -10, -7 \rangle$$

$$\vec{r} = \langle 1, -3, 5 \rangle + t\langle 4, -10, -7 \rangle$$

بما ان M تقع على المستقيم l فان

$$\overrightarrow{OM} = \langle 1+4t, -3-10t, 5-7t \rangle$$

$$\overrightarrow{OG} = \langle 0, -6, 4 \rangle$$

$$\overrightarrow{GM} = \langle 1+4t, 3-10t, 1-7t \rangle$$

رافت ابراهيم صافي

بما أن $GM \perp L$ فإن $GM \perp EF$ وعليه

$$\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$$

$$(1+4t)(4) + (3-10t)(-10) + (-7)(1-7t) = 0$$

بحل المعادلة $t = \dfrac{33}{165}$

نعوض $t = \dfrac{33}{165} \longleftarrow$ $M\left(1+4\left(\frac{33}{165}\right), -3-10\left(\frac{33}{165}\right), 5-7\left(\frac{33}{165}\right)\right)$

$$M(1.8, -5, 3.6)$$

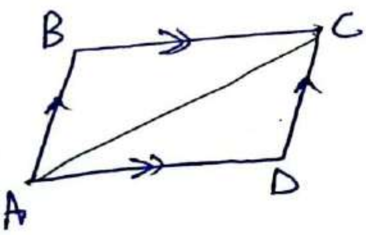
البعد بين G والمستقيم L

$$GM = \sqrt{(1.8-0)^2 + (-5+6)^2 + (3.6-4)^2}$$

$$GM \simeq 2.1$$

---

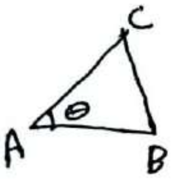
(14) يبين الشكل المجاور متوازي أضلاع $ABCD$ حيث $\overrightarrow{AB} = 6\hat{i} - 2\hat{j} + 11\hat{k}$ و $\overrightarrow{AC} = 15\hat{i} + 8\hat{j} + 5\hat{k}$ جد مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$



الحل:

قطر متوازي الأضلاع يقسم متوازي الأضلاع الى مثلثين متطابقين

وعليه نجد مساحة المثلث BAC



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (15)(6) + (8)(-2) + (5)(11) = 129$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36+4+121} = \sqrt{161}, \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{225+64+25} = \sqrt{314}$$

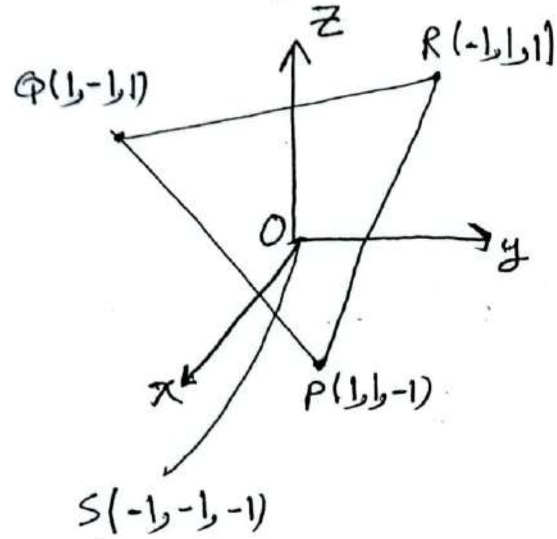
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{129}{\sqrt{161}\sqrt{314}}\right) \simeq 55^\circ$$

نضرب مساحة المثلث في (2) $\longleftarrow$ $\text{Area} = \left(\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\sin\theta\right)(2)$

$$= (\sqrt{161})(\sqrt{314})\sin 55^\circ \simeq 184.2$$

د. أفنان ابراهيم صافي

(15) تقع ذرة الكربون في جزيء الميثان في نقطة الأصل، وتقع ذرات الهيدروجين عند النقاط S و R و Q و P في الشكل المجاور، جد قياس الزاوية بين $\overrightarrow{OR}$ و $\overrightarrow{OS}$ اللذين يمثلان رابطة ذرة الكربون بذرتي الهيدروجين عند النقطة S والنقطة R



الحل:

$\overrightarrow{OR} = \langle -1, 1, 1 \rangle$

$\overrightarrow{OS} = \langle -1, -1, -1 \rangle$

$\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OS} = 1 - 1 - 1 = -1$

$|\overrightarrow{OS}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ ، $|\overrightarrow{OR}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}\sqrt{3}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)$

$\theta \approx 109.5^\circ$

إذا كانت $\vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 وكانت $\vec{r} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ p \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} q \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 والنقطة $A(9,-1,-14)$ تقع على المستقيم l_1 والنقطة C تقع على المستقيم l_2 أجب عن الأسئلة الآتية:

(16) إذا كان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متعامدان جد قيمة q

(17) إذا كان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متقاطعين، جد قيمة p وإحداثيات نقطة تقاطعهما

(18) رسمت دائرة مركزها النقطة C فقطعت المستقيم l_1 في النقطتين A و B جد متجه الموقع للنقطة B

الحل :- (16) اتجاه l_1 : $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ، اتجاه l_2 : $\begin{pmatrix} q \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} q \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$-q + 6 - 2 = 0 \rightarrow q = 4$$

---

(17) نساوي $\vec{r}$ لأنهما متقاطعان ، حيث $q=4$

$$\langle 8-t, 2+3t, -12+2t \rangle = \langle -4+4u, 10+2u, p-u \rangle$$

$8 - t = -4 + 4u$ — (1)

$2 + 3t = 10 + 2u$ — (2)

$-12 + 2t = p - u$ — (3)

بحل معادلة (1) مع (2) ينتج :

$t = 4$ ، $u = 2$

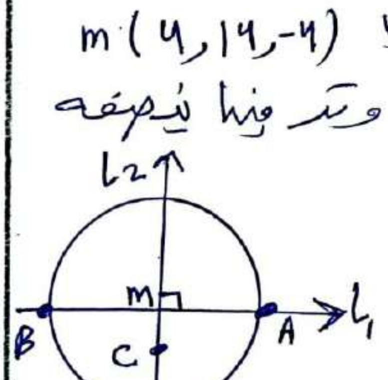
نعوض في معادلة (3) :

$-12 + 8 = p - 2$

$\boxed{p = -2}$

عند $t=4$ نعوض لمعرفة نقطة التقاطع $M(8-4, 2+12, -12+8) = (4, 14, -4)$

(18) نفرض نقطة تقاطع المستقيمين l_1 و l_2 هي $m(4,14,-4)$
وبما أن العمود النازل من مركز الدائرة على أي وتر فيها ينصفه
فإن النقطة m هي منتصف $\overrightarrow{AB}$



نقطة الأصل O
رسم تقريبي
C : مركز الدائرة

نفرض أن $B(x, y, z)$

$$\left(\frac{x+9}{2}, \frac{-1+y}{2}, \frac{-14+z}{2}\right) = (4, 14, -4)$$

بالمقارنة

$x = -1$ ، $y = 29$ ، $z = 6$

$$B(-1, 29, 6) \rightarrow \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 29 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$$

حل آخر

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AM}$

$= \langle 9, -1, -14 \rangle + 2\langle -5, 15, 10 \rangle$

$= \langle -1, 29, 6 \rangle$

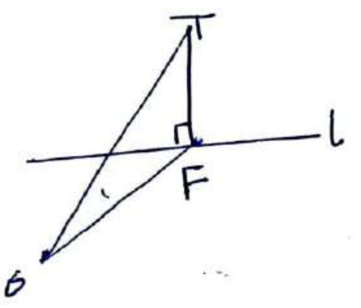
اذا كانت $\vec{r}=\begin{pmatrix}-19\\14\\-5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-3\\a\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1

والنقطة $T(-2,5,8)$ تقع خارج المستقيم l والنقطة F تقع على المستقيم l حيث $\overrightarrow{TF}$ يعامد المستقيم l ، اجب عما يلي:

(19) بيّن ان قيمة t التي تمثل النقطة F على المستقيم l هو $t=\frac{13a+44}{a^2+10}$

(20) اذا كانت $t=5$ في الفرع السابق ، جد متجهي الموقع الممكنين للنقطة F

الحل:



F تقع على المستقيم l وعليه

$\overrightarrow{OF}=\langle -19+t, 14-3t, -5+at\rangle$

(19)

$\overrightarrow{OT}=\langle -2,5,8\rangle$

$\overrightarrow{TF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OT}$

$\overrightarrow{TF}=\langle -17+t, 9-3t, -13+at\rangle$

$\overrightarrow{TF}\perp l$ وعليه:

$\langle -17+t, 9-3t, -13+at\rangle\cdot\langle 1,-3,a\rangle=0$

$-17+t-27+9t-13a+a^2t=0$

$10t+a^2t=13a+44$

$t(10+a^2)=13a+44 \rightarrow t=\frac{13a+44}{10+a^2}$

(20) عوض $t=5$ حيث نجد الى a :

$5=\frac{13a+44}{10+a^2} \rightarrow 50+5a^2=13a+44$

$5a^2-13a+6=0$

$(5a-3)(a-2)=0$

$a=\frac{3}{5}$, $a=2$

عند $\underset{t=5}{a=2} \longrightarrow \overrightarrow{OF}=\langle -19+5, 14-15, -5+10\rangle=\langle -14,-1,5\rangle$

عند $\underset{t=5}{a=\frac{3}{5}} \longleftarrow \overrightarrow{OF}=\langle -19+5, 14-15, -5+3\rangle=\langle -14,-1,-2\rangle$

الأستاذ ابراهيم صيافي

احداثيات النقاط A و B و C هي $(3,-2,4)$ و $(1,-5,6)$ و $(-4,5,-1)$ على الترتيب، المستقيم l يمر بالنقطة A وله المعادلة المتجهة :

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}7\\-7\\5\end{pmatrix}$$

(21) بيّن ان النقطة C تقع على المستقيم l

(22) جد معادلة متجهة للمستقيم المار بالنقطة A والنقطة B

(23) اذا وقعت النقطة D على المستقيم المار بالنقطة A والنقطة B بحيث كانت الزاوية CDA قائمة، جد احداثيات النقطة D

الحل :

(21)

$\langle -4,5,-1\rangle=\langle 3+7u,\ -2-7u,\ 4+5u\rangle$

$-4=3+7u \rightarrow u=-1$

$5=-2-7u \rightarrow u=-1$

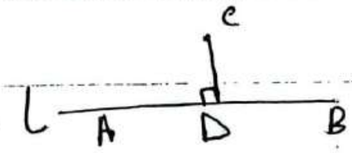
$-1=4+5u \rightarrow u=-1$

وعليه C تقع على المستقيم l المعطى لأنها تنتج من تعويض $u=-1$ في معادلته المتجهة

(22)

$\overrightarrow{AB}=\langle 1-3,-5+2,6-4\rangle=\langle -2,-3,2\rangle$

$\vec{r}=\langle 3,-2,4\rangle+t\langle -2,-3,2\rangle$



المطلوب

(23) النقطة D تقع على المستقيم ← تحقق معادلته

$\overrightarrow{OD}=\langle 3-2t,-2-3t,4+2t\rangle$

$\overrightarrow{CD}=\langle 3-2t+4,-2-3t-5,4+2t+1\rangle=\langle 7-2t,-7-3t,5+2t\rangle$

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}\rightarrow\langle 7-2t,-7-3t,5+2t\rangle\cdot\langle -2,-3,2\rangle=0$

$\boxed{\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}}$

$-14+4t+21+9t+10+4t=0$

$17t=-17\rightarrow t=-1$

$D(3+2,-2+3,4-2)=(5,1,2)$

راقت صافي

اذا كانت $\vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 وكانت

$\vec{r} = \begin{pmatrix} -9 \\ 21 \\ -4 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 ، اجب عما يلي :-

(24) بيّن ان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متعامدان

(25) بيّن ان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 يتقاطعان في النقطة $(-2, 7, 10)$

(26) : يقع كل رأس من رؤوس المربع ABCD اما على المستقيم l_1

واما على المستقيم l_2 اذا كانت احداثيات الرأس A هي :-

$(-5, 13, 4)$ جد احداثيات رؤوس الثلاثة الأخرى

الحل :-

(24) اتجاه المستقيم الاول l_1 : $\vec{v} = \langle 2, -1, -2 \rangle$

اتجاه المستقيم الثاني l_2 : $\vec{w} = \langle 1, -2, 2 \rangle$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = 2 + 2 - 4 = 0$

وعليه متعامدان لأن $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

---

(25) نساوي $\vec{r}$

$\langle 8+2t, 2-t, -2t \rangle = \langle -9+u, 21-2u, -4+2u \rangle$

$8 + 2t = -9 + u$ — (1)

$2 - t = 21 - 2u$ — (2)

$-2t = -4 + 2u$ — (3)

بحل معادلة (1) مع (3) ينتج

$u = 7$, $t = -5$

نتحقق في معادلة (2) :

$2 - t = 21 - 2u$

$2 + 5 = 21 - 14$ ✓

وعليه يتقاطع المستقيمان

عند $t = -5$

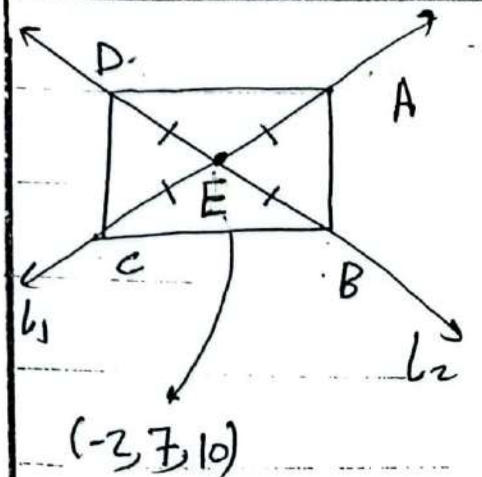
$\vec{r} = \langle 8 - 10, 2 + 5, -2(-5) \rangle$

$= \langle -2, 7, 10 \rangle$

احداثيات نقطة التقاطع

$(-2, 7, 10)$

رافت صافي



النقطة A تقع على المستقيم l_2
"لنتبع خطوات بدرس ثانياً"
$(-2, 7, 10)$ نقطة تقاطع قطري المربع
لأن قطرا المربع متعامدان
افرض احداثي $C(x, y, z)$

$$\left(\frac{x+^-5}{2}, \frac{y+13}{2}, \frac{4+z}{2}\right) = (-2, 7, 10)$$

بالمقارنة $x = 1$, $y = 1$, $z = 16$
احداثي C : $(1, 1, 16)$

$$\overline{AP} = \overline{DP}$$

النقطة B تقع على المستقيم l_1 وبالتالي تحقق معادلته

$B(8+2t, 2-t, -2t)$

لكن $\overline{AE} = \overline{BE}$

$$\overline{AE} = \sqrt{(-2+5)^2 + (7-13)^2 + (10-4)^2} = 9$$

$$\overline{BE} = \sqrt{(8+2t+2)^2 + (2-t-7)^2 + (-2t-10)^2} = 9$$

نربع ونحل اصولاً ينتج

$t = ^-2$, $t = ^-8$

عند $t = ^-8$ فان $B(8-16, 2+8, 16) = (-8, 10, 16)$

عند $t = ^-2$ فان $B(8-4, 2+2, 4) = (4, 4, 4)$

وهذه تمثل النقطة D أي ان $D(4, 4, 4)$ أو بالعكس

رؤوس المربع هنا :

$A(-5, 13, 4)$, $B(-8, 10, 16)$, $c(1, 1, 16)$, $D(4, 4, 4)$

رأفت ضاحي

اختبار نهاية الوحدة

اختار رمز الاجابة الصحيحة في كل مما يأتي :-

1) اذا كانت $B(5,-2,3)$ و $A(-3,4,9)$ فان الصورة الاحداثية المتجه $\overrightarrow{AB}$ هي :-

a) $\langle -2,2,12\rangle$ b) $\langle 8,-6,-6\rangle$ c) $\langle -1,1,6\rangle$ d) $\langle -8,6,-6\rangle$

الحل :-

$$\overrightarrow{AB}=\langle 5+3,-2-4,3-9\rangle=\langle 8,-6,-6\rangle$$

2) اذا كان $\vec{v}=\langle 2,c,-5\rangle$ وكان $|\vec{v}|=3\sqrt{5}$ فان c تساوي

a) 4 b) $-3,5$ c) 15 d) $-4,4$

الحل :- نربع

$$|\vec{v}|=\sqrt{4+c^2+25}=3\sqrt{5}$$

$$c^2+29=45 \longrightarrow c^2=45-29=16$$

$$c=4,-4$$

3) اذا كان PQR مستقيماً ، حيث $PQ:QR=3:1$ و $\overrightarrow{PQ}=\vec{a}$ فان التعبير عن المتجه $\overrightarrow{RQ}$ بدلالة $\vec{a}$ هو :-

a) $\frac{1}{3}\vec{a}$ b) $\frac{1}{4}\vec{a}$

c) $\frac{-1}{3}\vec{a}$ d) $\frac{-1}{4}\vec{a}$

الحل :- $\frac{PQ}{QR}=\frac{3}{1}$

$$PQ=3QR$$

$$QR=\frac{1}{3}PQ$$

$$\overrightarrow{QR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{3}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{RQ}=-\frac{1}{3}\vec{a}$$

رافت صافي

4) النقطة الواقعة على المستقيم الذي له المعادلة المتجهة :
$\vec{r} = \langle 4, -2, 5 \rangle + t \langle -2, 1, 3 \rangle$ والاحداثي y لها 10 هي

a) (18, 10, 28) b) (28, 10, 35) c) (-8, 10, 20) d) (-20, 10, 41)

الحل :-

احداثي النقطة على المستقيم : $(4-2t, -2+t, 5+3t)$

$-2+t = 10 \rightarrow t = 12$

نعوض $t = 12$

$(4-24, -2+12, 5+36) \rightarrow (-20, 10, 41)$

---

5) اذا كان $\vec{V} = \langle 2, -2, 5 \rangle$ وكان $\vec{w} = \langle -3, 4, 6 \rangle$ فان $3\vec{V} - 2\vec{w}$

a) $\langle 0, 2, 3 \rangle$ b) $\langle 12, -14, 3 \rangle$ c) $\langle 13, -16, -8 \rangle$ d) $\langle -13, 16, 8 \rangle$

الحل :-

$3\vec{V} - 2\vec{w} = 3\langle 2, -2, 5 \rangle - 2\langle -3, 4, 6 \rangle$

$= \langle 6, -6, 15 \rangle + \langle 6, -8, -12 \rangle = \langle 12, -14, 3 \rangle$

---

6) اذا كان قياس الزاوية بين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هو 60° وكان $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$ وكان $|\vec{a}| = 10$ فان مقدار $\vec{b}$ هو :

a) 3

b) 5

c) 6

d) 24

الحل :-

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{30}{10|\vec{b}|} = \frac{3}{|\vec{b}|}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{|\vec{b}|}$$

$$\boxed{|\vec{b}| = 6}$$

راقت ضامي

7) اذا كان $\vec{u} = \langle -4, 2, a \rangle$ وكان $\vec{v} = \langle 2, b, 5 \rangle$ وكان $\vec{u} \parallel \vec{v}$ فان قيمة a هي :

a) -10
b) -5
c) -1
d) 5

الحل :

$$\langle 2, b, 5 \rangle = K \langle -4, 2, a \rangle$$
$$\langle 2, b, 5 \rangle = \langle -4K, 2K, Ka \rangle$$
$$-4K = 2 \rightarrow K = \frac{-1}{2}$$
$$5 = Ka \rightarrow a = \frac{5}{K} = \frac{5}{\frac{-1}{2}} = -10$$

---

8) اذا كان المتجه $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ والمتجه $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ q \end{pmatrix}$ متعامدين ، فان قيمة q هي :

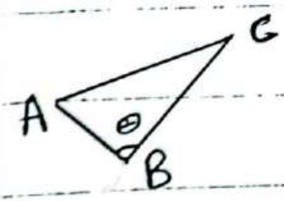
a) 0 b) 8
c) 10 d) 18

الحل :

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$$
$$30 - 84 + 3q = 0$$
$$3q = 54$$
$$q = \frac{54}{3} = 18$$

---

9) في المثلث المجاور ، اذا كانت $\overrightarrow{AB} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ، $\overrightarrow{BC} = -2\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$
جد قياس زاوية ABC الى أقرب عشر درجة



الحل : $\overrightarrow{BA} = -3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-3)(-2) + (1)(4) + (-2)(3)$$
$$= 6 + 4 - 6 = 4$$
$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$$
$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4 + 16 + 9} = \sqrt{29}$$

هنا أخذنا $\overrightarrow{BA}$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{14}\sqrt{29}}\right)$$
$$\theta \simeq 78.5$$

رافت صافي

10) اذا وقعت النقاط $E(2,0,4)$ و $F(h,5,1)$ و $G(3,10,k)$ على مستقيم واحد، فما قيمة كل من h و K.

الحل:-

بما انها على مستقيم واحد فهي على استقامة واحدة

بمعنى $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{EG}$

$\overrightarrow{EF} = \langle h-2, 5, -3 \rangle$ ، $\overrightarrow{EG} = \langle 1, 10, K-4 \rangle$

$\langle h-2, 5, -3 \rangle = c\langle 1, 10, K-4 \rangle$

$$h-2 = c \quad (1)$$
$$5 = 10c \rightarrow c = \frac{1}{2}$$
$$-3 = c(K-4) \quad (2)$$

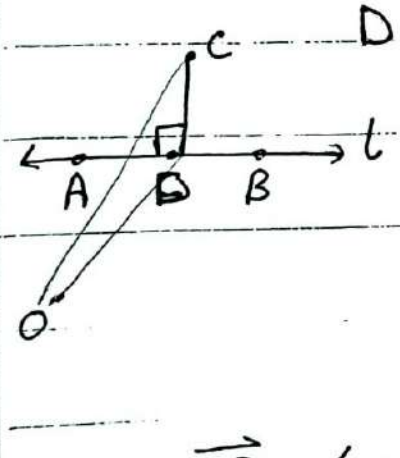
نعوض قيمة (c) في معادلة (1) $h-2 = \frac{1}{2} \rightarrow h = \frac{5}{2}$

في معادلة (2) $-3 = \frac{1}{2}(K-4) \rightarrow -6 = K-4$

$$K = -2$$

---

11) اذا كانت $A(3,-2,4)$ ، $B(1,-5,6)$ و $C(-4,5,-1)$ وكانت النقطة D تقع على المستقيم المار بالنقطة A والنقطة B وكانت الزاوية CDA قائمة، جد احداثي النقطة D.



الحل:- D تمثل مسقط

نجد معادلة المستقيم $\overrightarrow{AB} = \langle 1-3, -5+2, 6-4 \rangle$

$\overrightarrow{AB} = \langle -2, -3, 2 \rangle$

$\vec{r} = \langle 3, -2, 4 \rangle + t\langle -2, -3, 2 \rangle$

النقطة D تقع على المستقيم $\overrightarrow{OD} = \langle 3-2t, -2-3t, 4+2t \rangle$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \langle 3-2t+4, -2-3t-5, 4+2t+1 \rangle$

$= \langle 7-2t, -7-3t, 5+2t \rangle$

$\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB} \longrightarrow \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

بحل المعادلة $-2(7-2t) - 3(-7-3t) + 2(5+2t) = 0$

$t = -1$

نعوض $t=-1 \longrightarrow \overrightarrow{OD} = \langle 3+2, -2+3, 4-2 \rangle = \langle 5, 1, 2 \rangle$

وعليه احداثيات D هو $(5, 1, 2)$

اذا كانت $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1

وكانت $\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -17 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 اجب عما يلي

12) جد احداثيات نقطة تقاطع المستقيمين l_1, l_2

13) جد جيب الزاوية الحادة بين المستقيمين l_1, l_2

الحل :-

12) نساوي $\vec{r}_1$ في المعادلتين

$\langle -2-5\lambda, -5, 9+7\lambda \rangle = \langle -3+2\mu, -17+4\mu, 5-\mu \rangle$

$-2-5\lambda = -3+2\mu$ —— (1)

$-5 = -17+4\mu \rightarrow \mu = 3$

$9+7\lambda = 5-\mu$ —— (2)

نعوض $\mu=3$ في معادلة (1) :-

$-2-5\lambda = -3+6$

$5\lambda = -5 \longrightarrow \lambda = -1$

نعوضها في معادلة (3) :-

$9+7\lambda = 5-\mu$

$9-7 = 5-3$ ✓

نعوض $\lambda = -1$ لمعرفة نقطة التقاطع في معادلة l_1

$(-2+5, -5, 9-7)$

$(3, -5, 2)$

رافت ضاحي

(13) اتجاه المستقيم l_1 $\vec{v} = \langle -5, 0, 7 \rangle$

اتجاه المستقيم l_2 $\vec{u} = \langle 2, 4, -1 \rangle$

$\vec{v} \cdot \vec{u} = -10 + 0 - 7 = -17$

$|\vec{v}| = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$ ، $|\vec{u}| = \sqrt{4 + 16 + 1} = \sqrt{21}$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-17}{\sqrt{74}\sqrt{21}}\right) \simeq 115.5^\circ$

قياس الزاوية الحادة : $180 - 115.5^\circ = 64.5^\circ$

اذا كانت $C(-4, 1, 3)$ و $B(3, 0, 2)$ و $A(1, 4, -5)$

اجب عن الاسئلة الاربعة الآتية تباعاً :

(14) اكتب معادلة متجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{AB}$

(15) اكتب معادلة متجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{AC}$

(16) اذا كان قياس $\angle BAC = \theta$ فاثبت ان :

$$\cos\theta = \frac{58}{7\sqrt{138}}$$

(17) جد مساحة المثلث ABC

الحل :

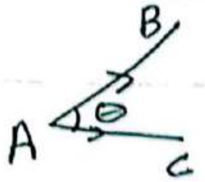
(14) $\vec{AB} = \langle 3-1, 0-4, 2+5 \rangle = \langle 2, -4, 7 \rangle$

$\vec{r} = \langle 1, 4, -5 \rangle + t\langle 2, -4, 7 \rangle$

(15) $\vec{AC} = \langle -4-1, 1-4, 3+5 \rangle = \langle -5, -3, 8 \rangle$

$\vec{r} = \langle 1, 4, -5 \rangle + u\langle -5, -3, 8 \rangle$

رافت ضابي ٠٧٨٥٥٠٠٥٠٠٠



(16) $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = -10+12+56 = 58$

$|\vec{AB}| = \sqrt{4+16+49} = \sqrt{69}$

$|\vec{AC}| = \sqrt{25+9+64} = \sqrt{98}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|} = \frac{58}{\sqrt{69}\sqrt{98}}$$

$$\cos\theta = \frac{58}{\sqrt{69}\sqrt{49\times2}} = \frac{58}{7\sqrt{138}}$$

(17) نجد $\sin\theta$ وعليه :-

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{3364}{6762}} = \frac{\sqrt{3398}}{7\sqrt{138}}$$

$$Area = \frac{1}{2}|\vec{AB}||\vec{AC}|\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{69}\sqrt{98}\,\frac{\sqrt{3398}}{7\sqrt{138}} = \frac{\sqrt{3398}}{2}$$

18) اذا كانت $\vec{r} = \langle 3,-25,13\rangle + t\langle 4,5,-1\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l وكانت النقطة V تقع على المستقيم l حيث $l \perp \overline{OV}$ فما احداثيات النقطة V

الحل: V تقع على المستقيم l فإن احداثياتها $(3+4t, -25+5t, 13-t)$

$\vec{OV} = \langle 3+4t, -25+5t, 13-t\rangle$

بما أن $l \perp \vec{OV}$ فعليه $\vec{w}\cdot\vec{OV} = 0$ حيث $\vec{w}$ اتجاه l

$\langle 3+4t, -25+5t, 13-t\rangle \cdot \langle 4, 5, -1\rangle = 0$

$12+16t-125+25t-13+t = 0$

$42t = 126 \rightarrow t = 3$

احداثي V هي: $(3+12, -25+15, 13-3)$
$(15, -10, 10)$

رأفت ضاحي

يمر المستقيم l_1 بالنقطتين E و F ويمر المستقيم l_2 بالنقطتين G و H حدد إذا كان هذان المستقيمان متوازيين أو متخالفين أو متقاطعين، ثم جد إحداثيات نقطة التقاطع إذا كانا متقاطعين في كل مما يأتي :-

(19) $E(7, 6, 34)$ و $F(5, 9, 16)$ و $G(1, 21, -2)$ و $H(-13, -14, 19)$

(20) $E(-3, -5, 16)$ و $F(12, 0, 1)$ و $G(7, 2, 11)$ و $H(1, -22, 23)$

---

19) $\overrightarrow{EF} = \langle 5-7, 9-6, 16-34 \rangle = \langle -2, 3, -18 \rangle$

$\overrightarrow{GH} = \langle -13-1, -14-21, 19+2 \rangle = \langle -14, -35, 21 \rangle$

غير متوازيان لعدم وجود ثابت يحقق $\langle -2, 3, -18 \rangle = k \langle -14, -35, 21 \rangle$

نفحص التقاطع

$\vec{r} = \langle 7, 6, 34 \rangle + t \langle -2, 3, -18 \rangle$ معادلة l_1

$\vec{r} = \langle 1, 21, -2 \rangle + u \langle -14, -35, 21 \rangle$ معادلة l_2

نساوي $\vec{r}$ $\langle 7-2t, 6+3t, 34-18t \rangle = \langle 1-14u, 21-35u, -2+21u \rangle$

$7 - 2t = 1 - 14u$ —— (1)

$6 + 3t = 21 - 35u$ —— (2)

$34 - 18t = -2 + 21u$ —— (3)

بحل معادلة (1) مع (3) ينتج $u = \frac{-6}{49}, t = \frac{15}{7}$

وعند تعويضهما في معادلة (3) لا تحققها وعليه المستقيمان غير متقاطعين، وعليه متخالفان

راقت صابحي ٠٧٧٠٠٥٠

2a) $\overrightarrow{EF} = \langle 12+3, 0+5, 1-16 \rangle = \langle 15, 5, -15 \rangle \xrightarrow{\text{نبسط}} \langle 3, 1, -3 \rangle$

$\overrightarrow{GH} = \langle 1-7, -22-2, 23-11 \rangle = \langle -6, -24, 12 \rangle \xrightarrow{\text{نبسط}} \langle -1, -4, 2 \rangle$

غير متوازيان لعدم وجود ثابت بحيث $\langle 15, 5, -15 \rangle = k \langle -6, -24, 12 \rangle$

نفحص التقاطع :-

معادلة المستقيم l_1 $\quad \vec{r} = \langle -3, -5, 16 \rangle + t \langle 3, 1, -3 \rangle$

معادلة المستقيم l_2 $\quad \vec{r} = \langle 7, 2, 11 \rangle + u \langle -1, -4, 2 \rangle$

نساوي $\vec{r}$ $\quad \langle -3+3t, -5+t, 16-3t \rangle = \langle 7-u, 2-4u, 11+2u \rangle$

$-3 + 3t = 7 - u$ —— (1)

$-5 + t = 2 - 4u$ —— (2)

$16 - 3t = 11 + 2u$ —— (3)

بحل معادلة (1) و (3) ينتج

$u = -5 , t = 5$

نعوض في معادلة (2) :

$-5 + t = 2 - 4u$

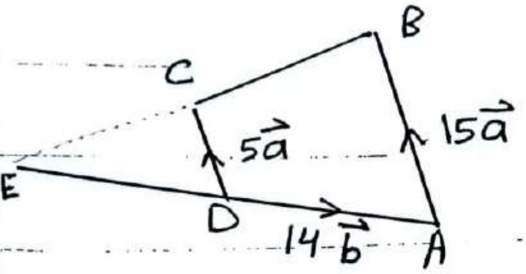
$-5 + 5 = 2 + 20$

$0 \neq 22$ X

وعليه المستقيمان غير متقاطعان وعليه متخالفان

راقت صافي

21) في الشكل الرباعي $ABCD$ ، مُدّ AD على استقامته ليصل الى النقطة E ، حيث $AD = 2DE$ اذا كان $\overrightarrow{DA} = 14\vec{b}$ وكان $\overrightarrow{DC} = 5\vec{a}$ وكان $\overrightarrow{AB} = 15\vec{a}$ فاثبت ان B و C و E على استقامة واحدة



الحل :-

نثبت ان $\overrightarrow{EB} \parallel \overrightarrow{EC}$

نكتب كل منهما بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DE}$$
$$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$
$$= \frac{1}{2}(-14\vec{b})$$
$$= -7\vec{b}$$

$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}$$
$$= (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}) + 15\vec{a}$$
$$= 7\vec{b} + 14\vec{b} + 15\vec{a}$$
$$= 21\vec{b} + 15\vec{a}$$
$$= 3(7\vec{b} + 5\vec{a}) \quad \text{—— (1)}$$

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}$$
$$= 7\vec{b} + 5\vec{a} \quad \text{—— (2)}$$

من معادلة (1) و (2) فان :-

$$\overrightarrow{EB} = 3\overrightarrow{EC}$$

وهذا يعني ان $\overrightarrow{EB} \parallel \overrightarrow{EC}$

لكن المتجهين ينطلقان من النقطة E نفسها وعليه النقاط E و C و B تقع على استقامة واحدة

رافت صافي